

UNIVERSITÉ DE M'SILA  
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET  
INFORMATIQUE

ESPACES TOPOLOGIQUES FLOUS  
"FUZZY TOPOLOGICAL SPACES"

DJELLOUL ATHMANI

MÉMOIRE PRÉSENTÉ CONFORMÉMENT AUX  
EXIGENCES DE DEGRÉ DE MASTER DE  
MATHÉMATIQUES

ANNÉE ACADÉMIQUE 2018-2019

**Président :** Prof. Abdelaziz AMROUNE  
Faculté de Mathématiques et Informatique  
Département de Mathématiques  
Université de M'sila

**Rapporteur :** Dr. Soheyb MILLES  
Faculté de Mathématiques et Informatique  
Département de Mathématiques  
Université de M'sila

**Examineur :** Prof. Lemnaouar ZEDAM  
Faculté de Mathématiques et Informatique  
Département de Mathématiques  
Université de M'sila

Djelloul ATHMANI

# ESPACES TOPOLOGIQUES FLOUS

Mémoire présenté conformément aux exigences de degré de

Master en Mathématiques

Année Académique 2018-2019



---

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>vii</b>
<b>1 Généralités sur les sous-ensembles flous</b>	<b>1</b>
1.1 Définitions de base . . . . .	1
1.1.1 Rappels sur les ensembles classiques . . . . .	1
1.1.2 Sous-ensemble flou . . . . .	2
1.2 Concepts fondamentaux des ensembles flous . . . . .	3
1.2.1 Opérations sur les sous-ensembles flous . . . . .	3
1.2.2 Caractéristiques d'un sous-ensemble flou . . . . .	7
1.2.3 Représentation d'un sous-ensemble flou à partir des sous-ensembles classiques . . . . .	8
1.2.4 Produit Cartésien et projection des sous-ensembles flous . .	11
1.2.5 Normes et conormes triangulaires . . . . .	12
<b>2 Généralités sur les relations floues</b>	<b>17</b>
2.1 Rappels sur les relations classique . . . . .	17
2.2 Relations floues . . . . .	18
2.2.1 Définitions de base des relations floues . . . . .	18
2.2.2 Opérations sur les relations floues . . . . .	19
2.2.3 Composition des relations floues . . . . .	21
2.2.4 Propriétés particulières des relations floues . . . . .	21
2.2.5 Classes particulières des relations floues . . . . .	23
<b>3 Espaces topologiques flous</b>	<b>27</b>
3.1 Topologie floue : Définitions et exemples . . . . .	27
3.2 Voisinage, adhérence et point d'accumulation . . . . .	30
3.3 Topologie floue générée par une relation floue . . . . .	33
3.4 Topologies floues particuliers générées par des relations floues . . .	36
<b>Conclusion</b>	<b>39</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>40</b>



---

# Introduction

La topologie générale est une branche des mathématiques qui fournit un vocabulaire et un cadre général pour traiter des notions de limite, de continuité, et de voisinage. Les espaces topologiques forment le socle conceptuel permettant de définir ces notions. Elles sont suffisamment générales pour s'appliquer à un grand nombre de situations différentes : ensembles finis, ensembles discrets, espaces de la géométrie euclidienne, espaces numériques à  $n$  dimensions, espaces fonctionnels plus complexes, mais aussi en géométrie algébrique. Ces concepts apparaissent dans presque toutes les branches des mathématiques ; ils sont donc centraux dans la vision moderne des mathématiques.

En 1965, le professeur L.A. Zadeh [24], a généralisé la notion habituelle de l'ensemble par présentant "les ensembles flous". Les sous-ensembles flous sont les classes des objets avec un degré d'appartenance s'étendant entre 0 et 1 ( $\mu : X \longrightarrow [0, 1]$ ). Les ensembles flous nous permettent de représenter des concepts vagues exprimé en de langage naturel. Cela nous permettent également de l'utiliser dans beaucoup de concepts comme les treillis flous, les anneaux flous, la mesure floue, l'espace topologique flou et d'autre branches.

En 1968, C.L. Chang [2] a défini la notion de topologie flou comme une généralisation de la notion de topologie classique. Cette théorie des espaces topologiques flous a été développée par plusieurs chercheurs. C.K. Wong [22] a étudié quelques propriétés de topologie flou, R.H. Warren [21] a présenté la continuité dans un espace topologique flou. Aussi, R. Lowen [9] a introduit une classe particulière d'une topologie floue, M.S Ying [23] a donnée une nouvelle approche sur la topologie floue. Récemment, Mishra [14] a présenté et étudié la notion de la topologie floue générée par une relation floue.

Le but de ce mémoire est d'étudier la notion de topologie floue et quelques propriétés de base sur cette structure. On va fuzzifier (donner une deuxième version floue) la définition de la topologie floue donné par Chang, car sa définition est presque classique et le sens flou dans cette définition est absant. Aussi, on va traiter la notion de la topologie floue générée par une relation floue et plusieurs exemples sera donné pour clarifier cette structure. Enfin, on va étudier quelques classes particulières de topologie floue générée par une relation floue les plus reconnus dans la littérature.

Le mémoire est subdivisé en trois chapitres :

Dans le premier chapitre, nous allons donner les concepts fondamentales de la théorie des sous-ensembles flous ; sa position par rapport à la théorie des ensembles classique, les propriétés fondamentales des sous-ensembles flous et les règles de

calculs algébriques, les  $\alpha$ -coupes, l'image directe et l'image réciproque d'un sous-ensemble flou. Dans le deuxième chapitre, nous allons donner les concepts de base sur les relations floues, ses propriétés fondamentales, quelques opérations algébriques, la composition et des classes particulières des relations floues. Dans le troisième chapitre, on va étudier la notion de topologie floue et quelques propriétés de base. On s'intéresse ici à la topologie floue générée par une relation floue et dans ce sens, on va étudier quelques types de cette topologie.



---

# 1 Généralités sur les sous-ensembles flous

La théorie des sous-ensembles flous est une théorie mathématique du domaine de l'algèbre abstraite. Elle a été développée par Lotfi Zadeh [24] en 1965 afin de représenter mathématiquement l'imprécision relative à certaines classes d'objets et sert de fondement à la logique floue. Pour plus de détail voir [12, 24].

## 1.1. Définitions de base

---

Dans cette section, on donne un rappel sur les ensembles classiques, les ensembles flous, opérations sur les sous-ensembles flous et quelques exemples.

### 1.1.1. Rappels sur les ensembles classiques

Dans ce qui suit, on va donner un rappel sur l'ensemble classique. Un ensemble  $A$  de référence  $X$  est une collection d'objets, cet ensemble peut être défini par :

- (i) Écriture de tous ses éléments, dont les éléments sont  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , et on écrit,  $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ .
- (ii) Une propriété ou des propriétés sont satisfaites par ses éléments, et on écrit,  $A = \{x|P(x)\}$ . Où le symbole "  $|$  " désigne la phrase " telle que " et  $P(x)$  une proposition de la forme "  $x$  a une propriété  $P$  ".
- (iii) Une fonction dite fonction caractéristique  $\chi_A$  qui prend la valeur 0 pour les éléments n'appartient pas à  $A$  et la valeur 1 pour ceux qui appartient à  $A$  :

$$\begin{aligned}\chi_A : X &\longrightarrow \{0, 1\} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A ; \\ 1 & \text{si } x \in A. \end{cases}\end{aligned}$$

**Définition 1.1 (Opérations sur les ensembles classiques).** Soient  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles de référence  $X$ .

- (i) **L'inclusion** :  $A \subset B$  si et seulement si  $\forall x \in X, (x \in A) \implies (x \in B)$ , c-à-d,  $(\chi_A(x) \leq \chi_B(x))$ .
- (ii) **L'égalité** :  $A = B$  si et seulement si  $A \subseteq B$  et  $B \subseteq A$  c-à-d,  $(\chi_A(x) = \chi_B(x))$ .
- (iii) **Le complément** :  $A^c = \{x \in X \mid x \notin A\}$  c-à-d,  $\chi_{A^c}(x) = 1 - \chi_A(x)$ .

- (iv) **L'intersection** :  $A \cap B = \{x \in X \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$  c-à-d,  $\chi_{A \cap B}(x) = \min(\chi_A(x), \chi_B(x))$ . On a  $A \cap A^c = \emptyset$  est appelé lois de non contradiction.
- (v) **L'union** :  $A \cup B = \{x \in X \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$  c-à-d,  $\chi_{A \cup B}(x) = \max(\chi_A(x), \chi_B(x))$ . On a  $A \cup A^c = X$  est appelé lois de tiers exclu.
- (vi) **La différence** :  $A \setminus B = A - B = A \cap B^c = \{x \in X \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}$  c-à-d,  $\chi_{A-B}(x) = \chi_{A \cap B^c}(x) = \min(\chi_A(x), \chi_{B^c}(x))$ .

**Exemple 1.1.** Soit  $X = \{x, y, z, t, u, v\}$  un ensemble, et soit  $A, B$  deux sous-ensembles sur  $X$  tels que  $A = \{x, y, t, u\}$  et  $B = \{x, z, t\}$ . Alors

$$\begin{aligned} A^c &= \{z, v\} ; \\ B^c &= \{y, u, v\} ; \\ A \cap B &= \{x, t\} ; \\ A \cup B &= \{x, y, z, t, u\} ; \\ A \setminus B &= \{y, u\} ; \\ B \setminus A &= \{z\}. \end{aligned}$$

### 1.1.2. Sous-ensemble flou

La notion d'ensemble flou a été introduit par Zadeh [24] comme une généralisation de la notion de l'ensemble classique.

**Définition 1.2 (Sous-ensemble flou).** [24] Soit  $X$  un ensemble de référence, un sous-ensemble flou  $A$  (EF) de  $X$  est l'ensemble des couples

$$\{\langle x, \mu_A(x) \rangle \mid x \in X\}.$$

Avec  $\mu_A(x)$  est la fonction d'appartenance de  $X$  dans  $[0, 1]$  et qui représente le degré d'appartenance de  $x$  dans  $A$ .

On note  $\mathcal{F}(X)$  l'ensemble qui contient tous les sous-ensembles flous de  $X$ .

**Exemple 1.2 (Cas fini).** (i) Soit  $X = \{\text{France, Belgique, USA, Canada, Espagne, Italie}\}$  est l'ensemble des nations du monde on peut définir le sous ensemble flou  $A$  des nations qui sont exercés le basket-ball, alors,  
 $A = \{\langle \text{France}, 0.3 \rangle; \langle \text{Belgique}, 0.1 \rangle; \langle \text{USA}, 0.8 \rangle; \langle \text{Canada}, 0.7 \rangle; \langle \text{Espagne}, 0.6 \rangle; \langle \text{Italie}, 0.2 \rangle\}.$

(ii) Soit  $X = \{\langle \text{London}, 0.3 \rangle; \langle \text{Manchester}, 0.2 \rangle; \langle \text{Liverpool}, 0.2 \rangle\}$  est l'ensemble de population qui vivant dans les villes d'Angleterre et soit  $A_1, A_2, A_3$  les sous-ensemble des supporters des équipes de foot-ball de London, Manchester, Liverpool respectivement, données par :

$$\begin{aligned} A_1 &= \{\langle \text{Chelsea}, 0.3 \rangle; \langle \text{Arsenal}, 0.3 \rangle; \langle \text{Tottenham}, 0.2 \rangle\} ; \\ A_2 &= \{\langle \text{Man.Utd}, 0.5 \rangle; \langle \text{Man.City}, 0.3 \rangle\} ; \end{aligned}$$

$$A_3 = \{ \langle \text{Liverpool}, 0.5 \rangle; \langle \text{Everton}, 0.3 \rangle \}.$$

$A_1, A_2$ , et  $A_3$  sont des sous-ensembles flous de  $X$ .

**Exemple 1.3 (Cas infini).** Soit  $X = [a, b]$  telle que  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , et soit  $A$  un sous-ensemble de  $X$  définie par :

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a - \alpha \text{ ou } b + \beta < x ; \\ 1 & \text{si } a < x < b ; \\ 1 + \left(\frac{x-a}{\alpha}\right) & \text{si } a - \alpha < x < a ; \\ 1 - \left(\frac{b-x}{\beta}\right) & \text{si } b < x < b + \beta. \end{cases}$$

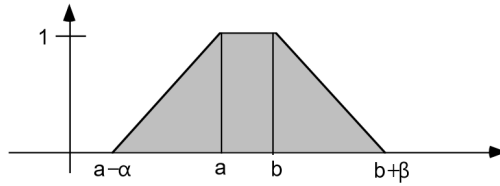


Figure 1.1

## 1.2. Concepts fondamentaux des ensembles flous

Dans cette section, on va voir quelques opérations sur des sous-ensembles flous, les caractéristiques d'un sous-ensemble flou, les  $\alpha$  – coupes, produit cartésien et projection des sous-ensembles flous. Finalement, on va aborder la notion du norme et conorme triangulaire.

### 1.2.1. Opérations sur les sous-ensembles flous

Comme dans la théorie des ensembles classique, en théorie des ensembles flous, il existe un certain nombre d'opérations, ces opérations définies par quelque opérateurs comme, " max ", " min ", ... pour plus de détail voir [12, 26].

Pour deux sous-ensembles flous  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{F}(X)$  on a

- (i) **Inclusion** on dit que  $A$  est inclus dans  $B$ , qu'on note alors  $A \subset B$ , si tout élément  $x$  de  $X$  qui appartient à  $A$  appartient aussi à  $B$  avec un degré au moins aussi grand (i.e,  $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ ).
- (ii) **Égalité** on dit que deux sous-ensembles flous  $A$  et  $B$  sont égaux, si leurs fonctions d'appartenance prennent la même valeur pour tout élément  $x$  de  $X$  (i.e,  $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ ).

- (iii) **Intersection** de deux sous-ensembles flous  $A$  et  $B$  est l'ensemble flou constitué des éléments de  $X$  affectés du plus petit des degrés avec lesquels ils appartiennent à  $A$  et  $B$ , pour tout élément  $x$  de  $X$  on a  $A \cap B$  est donné par

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)).$$

- (iv) **Union** de deux sous-ensembles flous  $A$  et  $B$  est l'ensemble flou constitué des éléments de  $X$  affectés du plus grand des degrés avec lesquels ils appartiennent à  $A$  et  $B$ , pour tout élément  $x$  de  $X$  on a  $A \cup B$  est donné par

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)).$$

- (v) **Le complément**  $A^c$  d'un sous-ensemble flou  $A$  de  $X$  est défini comme le sous-ensemble flou de  $X$  de fonction d'appartenance :

$$\mu_{A^c}(x) = 1 - \mu_A(x), \forall x \in X.$$

- (vi) **Addition**  $A + B$

$$A + B = \{ \langle x, \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x) \rangle \mid x \in E \}.$$

- (vii) **Multiplication**  $A \cdot B$

$$A \cdot B = \{ \langle x, \mu_A(x) \cdot \mu_B(x) \rangle \mid x \in E \}.$$

**Exemple 1.4 (Cas fini).** Soit  $X = \{1, 2, 3, 4\}$  et soient  $A, B$  deux sous-ensembles flous de  $X$  données par :

$$A = \{ \langle 1, 0.2 \rangle; \langle 2, 0.4 \rangle; \langle 3, 0.6 \rangle; \langle 4, 0.6 \rangle; \langle 5, 0.9 \rangle \};$$

$$B = \{ \langle 1, 0.3 \rangle; \langle 2, 0.4 \rangle; \langle 3, 0.5 \rangle; \langle 4, 0.7 \rangle; \langle 5, 0.8 \rangle \}.$$

Alors, on obtient :

$$A \cap B = \{ \langle 1, 0.2 \rangle; \langle 2, 0.4 \rangle; \langle 3, 0.5 \rangle; \langle 4, 0.6 \rangle; \langle 5, 0.8 \rangle \}.$$

$$A \cup B = \{ \langle 1, 0.3 \rangle; \langle 2, 0.4 \rangle; \langle 3, 0.6 \rangle; \langle 4, 0.7 \rangle; \langle 5, 0.9 \rangle \}.$$

$$A^c = \{ \langle 1, 0.8 \rangle; \langle 2, 0.6 \rangle; \langle 3, 0.4 \rangle; \langle 4, 0.4 \rangle; \langle 5, 0.1 \rangle \}.$$

$$B^c = \{ \langle 1, 0.7 \rangle; \langle 2, 0.6 \rangle; \langle 3, 0.5 \rangle; \langle 4, 0.3 \rangle; \langle 5, 0.2 \rangle \}.$$

$$A + B = \{ \langle 1, 0.44 \rangle; \langle 2, 0.64 \rangle; \langle 3, 0.8 \rangle; \langle 4, 0.88 \rangle; \langle 5, 0.98 \rangle \}.$$

$$A \cdot B = \{ \langle 1, 0.06 \rangle; \langle 2, 0.16 \rangle; \langle 3, 0.3 \rangle; \langle 4, 0.42 \rangle; \langle 5, 0.72 \rangle \}.$$

**Exemple 1.5 (Cas infini).** Soit  $X = \mathbb{R}$  et soient  $A$  l'ensemble des nombres réels considérablement plus grand que 4 et  $B$  l'ensemble des nombres réels proches à 5 sont caractérisés respectivement par ses fonctions d'appartenances :

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 4; \\ (1 + (x - 4)^{-2})^{-1} & \text{si } x > 4. \end{cases}$$

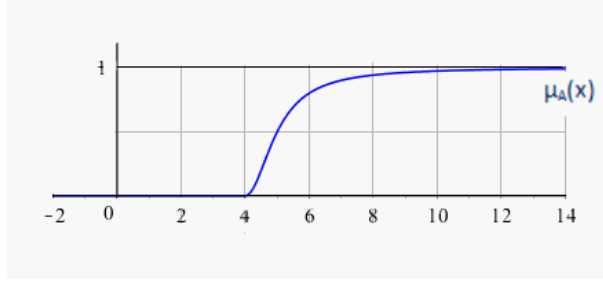


Figure 1.2

$$\mu_B(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 5 ; \\ (1 + (x - 5)^2)^{-1} & \text{si } x > 5. \end{cases}$$

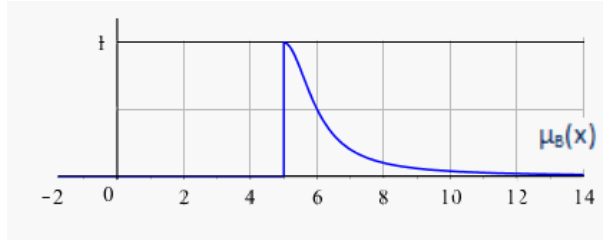


Figure 1.3

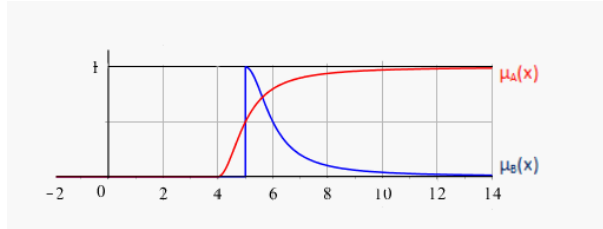


Figure 1.4

Donc, on obtient  $A \cap B$  l'ensemble des réels plus grand que 4 et proche de 5 donné par sa fonction d'appartenance :

$$\mu_{A \cap B}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 5 ; \\ \min[(1 + (x - 4)^2)^{-1}, (1 + (x - 5)^2)^{-1}] & \text{si } x > 5. \end{cases}$$

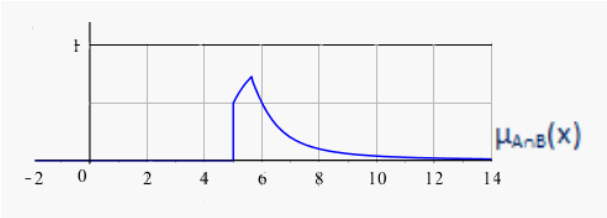


Figure 1.5

Et  $A \cup B$  l'ensemble des réels plus grand que 4 ou proche de 5 donné par sa fonction d'appartenance :

$$\mu_{A \cup B}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 4 ; \\ \max[(1 + (x - 4)^{-2})^{-1}, (1 + (x - 5)^2)^{-1}] & \text{si } x > 4. \end{cases}$$

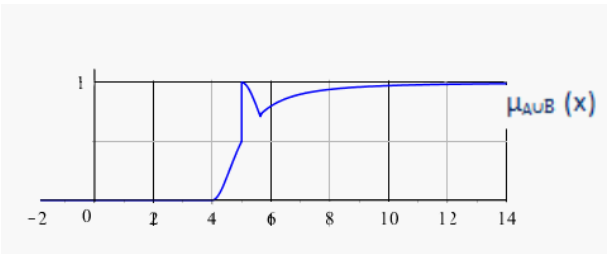


Figure 1.6

**Proposition 1.1 (Propriétés fondamentales des opérations ensemblistes).**

[12] Soient  $A, B$ , et  $C \in \mathcal{F}(X)$ , on a les propriétés suivantes :

Commutativité	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
Associativité	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Idempotente	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$
Distributivité	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Lois de De Morgan	$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
Loi de non contradiction (non valide)	$A \cap A^c \neq \emptyset$
Loi de tiers exclu (non valide)	$A \cup A^c \neq X$

### 1.2.2. Caractéristiques d'un sous-ensemble flou

Les caractéristiques d'un sous-ensemble flou  $A$  de référence  $X$  il diffère à quel point d'un sous-ensemble classique de  $X$ .

**Définition 1.3 (Support d'un sous-ensemble flou).** [6] *Soit  $A$  un ensemble flou sur  $X$ . Le support de  $A$ , noté  $Supp(A)$ , est la partie de  $X$  sur laquelle la fonction de  $A$  n'est pas nulle*

$$Supp(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) > 0\}.$$

**Définition 1.4 (Noyau d'un sous-ensemble flou).** [6] *Soit  $A$  un ensemble flou sur  $X$ . Le noyau de  $A$ , noté  $Noy(A)$ , est l'ensemble des éléments de  $X$  pour lesquels la fonction d'appartenance de  $A$  vaut 1*

$$Noy(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) = 1\}.$$

**Définition 1.5 (Hauteur d'un sous-ensemble flou).** [6] *Soit  $A$  un ensemble flou sur  $X$ . La hauteur de  $A$  notée  $H(A)$ , est la plus grande valeur prise par sa fonction d'appartenance*

$$H(A) = \sup_{x \in X} (\mu_A(x)).$$

**Définition 1.6 (Sous ensemble normalisé).** [6] *Soit  $A$  un ensemble flou sur  $X$ . Le sous-ensemble flou  $A$  de  $X$  est normalisé si sa hauteur  $H(A)$  est égale à 1.*

**Définition 1.7 (Cardinalité d'un sous-ensemble flou).** [6] *Soit  $A$  un ensemble flou sur  $X$ . La cardinalité du sous ensemble flou  $A$  de  $X$ , notée  $|A|$ , lorsque  $X$  est fini, est définie par*

$$|A| = \sum_{x \in X} \mu_A(x).$$

**Exemple 1.6 (Cas fini).** *Soit  $X = \{a, b, c, d, e\}$ , et soit le sous-ensemble flou  $A$  donnée par :  $A = \{\langle a, 0.3 \rangle; \langle b, 0.2 \rangle; \langle c, 0.4 \rangle; \langle d, 0.8 \rangle; \langle e, 0.5 \rangle\}$ . Alors,  $Supp(A) = X$ ,  $Noy(A) = \emptyset$ ,  $H(A) = 0.8$ , et  $|A| = 2.2$ .*

**Exemple 1.7 (Cas infini).** *Soit  $X = [a, b]$  telle que  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , et soit  $A$  un sous-ensemble de  $X$  de **Exemple 1.3** et d'après **Figure 1.1**.*

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a - \alpha \text{ ou } b + \beta < x; \\ 1 & \text{si } a < x < b; \\ 1 + \left(\frac{x-a}{\alpha}\right) & \text{si } a - \alpha < x < a; \\ 1 - \left(\frac{b-x}{\beta}\right) & \text{si } b < x < b + \beta. \end{cases}$$

*Alors,  $Supp(A) = [a - \alpha, b + \beta]$ ,  $Noy(A) = [a, b]$ ,  $H(A) = 1$ , et  $|A|$  est infini.*

**Proposition 1.2.** *Le noyau et le support d'un sous-ensemble flou vérifient les propriétés suivantes :*

$$(i) \text{ } Supp(A^c) = X - Noy(A).$$

$$(ii) \text{ } Noy(A^c) = X - Supp(A).$$

*Démonstration.* (i)

$$\begin{aligned} Supp(A^c) &= \{x \in X \mid \mu_{A^c}(x) \neq 0\} \\ &= \{x \in X \mid 1 - \mu_A(x) \neq 0\} \\ &= \{x \in X \mid \mu_A(x) \neq 1\} \\ &= \{x \in X \mid x \notin Noy(A)\} \\ &= X - Noy(A). \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} Noy(A^c) &= \{x \in X \mid \mu_{A^c}(x) = 1\} \\ &= \{x \in X \mid 1 - \mu_A(x) = 1\} \\ &= \{x \in X \mid \mu_A(x) = 0\} \\ &= \{x \in X \mid x \notin Supp(A)\} \\ &= X - Supp(A). \end{aligned}$$

□

### 1.2.3. Représentation d'un sous-ensemble flou à partir des sous-ensembles classiques

En présence de connaissances imprécises représentées par les sous-ensembles, plusieurs raisons conduisent à rechercher les sous-ensembles ordinaires qui leur sont associés.

#### Les $\alpha$ -coupes associés à un ensemble flou

Le  $\alpha$ -coupe d'un ensemble flou  $A$  est un ensemble classique telle que ses éléments appartient à l'ensemble flou  $A$  avec un degré au moins égal à  $\alpha$ , ceci vérifie des notions classiques en termes flous.

**Définition 1.8 (Le niveau de flou).** [12] *Pour un seuil  $\alpha$  dans  $[0, 1]$ , on définit le  $\alpha$ -coupe du sous-ensemble flou  $A$  de  $X$  (ou sous-ensemble de niveau  $\alpha$  associé à  $A$ ) comme le sous-ensemble*

$$A_\alpha = \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}.$$



Dont la fonction caractéristique  $\chi_{A_\alpha}$  est telle que :  $\chi_{A_\alpha}(x) = 1$  si et seulement si  $\mu_A(x) \geq \alpha$ .

**Proposition 1.3.** [12] Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles flous sur  $X$ . Alors,

- (i)  $(A \cup B)_\alpha = A_\alpha \cup B_\alpha$  ;
- (ii)  $(A \cap B)_\alpha = A_\alpha \cap B_\alpha$  ;
- (iii)  $A \subset B \implies A_\alpha \subset B_\alpha$  ;
- (iv)  $A_1 = \text{Noy}(A)$  ;
- (v)  $A_0 = X$ .

**Exemple 1.8.** Soit  $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  et soient  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles flous de  $X$  telle que

$$A = \{\langle 1, 0.4 \rangle; \langle 2, 0.9 \rangle; \langle 3, 0.7 \rangle; \langle 4, 0.1 \rangle; \langle 5, 1 \rangle\} ;$$

$$B = \{\langle 1, 0.6 \rangle; \langle 2, 0.3 \rangle; \langle 3, 0.4 \rangle; \langle 4, 0.5 \rangle; \langle 5, 0.2 \rangle\}.$$

Alors,

$$A \cup B = \{\langle 1, 0.6 \rangle; \langle 2, 0.9 \rangle; \langle 3, 0.7 \rangle; \langle 4, 0.5 \rangle; \langle 5, 1 \rangle\} ;$$

$$A \cap B = \{\langle 1, 0.4 \rangle; \langle 2, 0.3 \rangle; \langle 3, 0.4 \rangle; \langle 4, 0.1 \rangle; \langle 5, 0.2 \rangle\}.$$

Donc, on obtient

$$A_{0.4} = \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq 0.4\} = \{1, 2, 3, 5\} ;$$

$$B_{0.4} = \{x \in X \mid \mu_B(x) \geq 0.4\} = \{1, 3, 4\}.$$

On obtient aussi

$$\begin{aligned} (A \cup B)_{0.4} &= \{x \in X \mid \mu_{A \cup B}(x) \geq 0.4\} \\ &= A_{0.4} \cup B_{0.4} \\ &= \{1, 2, 3, 5\} \cup \{1, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4, 5\} ; \\ (A \cap B)_{0.4} &= \{x \in X \mid \mu_{A \cap B}(x) \geq 0.4\} \\ &= A_{0.4} \cap B_{0.4} \\ &= \{1, 2, 3, 5\} \cap \{1, 3, 4\} = \{1, 3\}. \end{aligned}$$

**Définition 1.9 (Le niveau strict de flou).** [12] Pour tout niveau  $\alpha$  de  $[0, 1]$ , on définit le  $\alpha$ -coupe strict du sous-ensemble flou  $A$  comme le sous-ensemble

$$A^\alpha = \{x \in X \mid \mu_A(x) > \alpha\}.$$

**Remarque 1.1.** (i) Les niveaux stricts de flous ont les mêmes propriétés que les niveaux de flous.

(ii) Si  $\alpha = 0$ , le 0-coupe strict d'un sous-ensemble flou  $A$  coïncide à la définition

d'un support  $c$ -à- $d$  :

$$A^0 = \text{Supp}(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) > 0\}.$$

$$(iii) \text{ Supp}(A) = A^0 \subseteq A_0.$$

## Représentation d'un sous-ensemble flou à partir de ses $\alpha$ -coupes

La suite de toutes les  $\alpha$ -coupes d'un sous-ensemble flou  $A$  le représente complètement. de façon imagée, on peut dire qu'il est "coupé en tranches" et qu'en possédant toutes les tranches, on en possède toute la substance. Plus généralement, il est équivalent de connaître la famille de toutes les  $\alpha$ -coupes d'un sous-ensemble flou ou de connaître le sous-ensemble flou lui-même.

**Théorème 1.1 (Théorème de décomposition).** [12] *Tout sous-ensemble flou  $A$  de l'ensemble de référence  $X$  est défini à partir de ses  $\alpha$ -coupes pour tout élément  $x$  de  $X$*

$$\mu_A(x) = \sup_{\alpha \in ]0,1]} (\alpha \cdot \chi_{A_\alpha}(x)).$$

*Démonstration.* Soit la fonction caractéristique

$$\chi_{A_\alpha}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu_A(x) \geq \alpha ; \\ 0 & \text{si non.} \end{cases}$$

en multipliant chaque membre par un nombre réel  $\alpha$ , on obtient :

$$\alpha \chi_{A_\alpha}(x) = \begin{cases} \alpha & \text{si } \mu_A(x) \geq \alpha ; \\ 0 & \text{si non.} \end{cases}$$

En introduisant l'opérateur "sup" dans chaque membre, on a :

$$\sup_{\alpha \in ]0,1]} \alpha \chi_{A_\alpha}(x) = \sup_{\alpha \in ]0,1]} \{\mu_A(x) \geq \alpha\} \Rightarrow \sup_{\alpha \in ]0,1]} \alpha \chi_{A_\alpha}(x) = \sup_{\alpha \in ]0,1]} \{\alpha \leq \mu_A(x)\}$$

Or (caractérisation de la borne supérieure dans  $\mathbb{R}$ ) :  $q = \sup(A)$  si et seulement si  $\forall q \in A, x \leq q$  ( $q$  est un majorant de  $A$ ). Ce qui permet d'établir que :

$$\mu_A(x) = \sup_{\alpha \in ]0,1]} (\alpha \cdot \chi_{A_\alpha}(x)).$$

□

**Exemple 1.9.** Soit  $X = \{1, 2, \dots, 10\}$  et  $A = \{\langle 1, 0.2 \rangle; \langle 2, 0.5 \rangle; \langle 3, 0.8 \rangle; \langle 4, 1 \rangle; \langle 5, 0.7 \rangle; \langle 6, 0.3 \rangle\}$ . On a pour tout niveau  $\alpha$  dans  $[0, 1]$

$$\begin{aligned} A_1 &= \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq 1\} = \{4\} ; \\ A_{0.8} &= \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq 0.8\} = \{3, 4\} ; \\ A_{0.7} &= \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq 0.7\} = \{3, 4, 5\} ; \\ A_{0.5} &= \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq 0.5\} = \{2, 3, 4, 5\} ; \\ A_{0.3} &= \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq 0.3\} = \{2, 3, 4, 5, 6\} ; \\ A_{0.2} &= \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq 0.2\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}. \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} \mu_A(1) &= \max(1 \times 0, \dots, 0.2 \times 1, 0.1 \times 1, 0 \times 1) = 0.2 ; \\ \mu_A(2) &= \max(1 \times 0, \dots, 0.5 \times 1, 0.4 \times 1, \dots, 0 \times 1) = 0.5 ; \\ \mu_A(3) &= \max(1 \times 0, 0.9 \times 0, 0.8 \times 1, \dots, 0 \times 1) = 0.8 ; \\ \mu_A(4) &= \max(1 \times 1, \dots, 0 \times 1) = 1 ; \\ \mu_A(5) &= \max(1 \times 0, \dots, 0.7 \times 1, \dots, 0 \times 1) = 0.7 ; \\ \mu_A(6) &= \max(1 \times 0, \dots, 0.3 \times 1, \dots, 0 \times 1) = 0.3. \end{aligned}$$

Ce qui fournit bien l'ensemble  $A$ .

#### 1.2.4. Produit Cartésien et projection des sous-ensembles flous

Le produit cartésien des sous-ensembles flous est le minimum de ces degrés d'appartenance et ces projections est le maximum de ces produit cartésien.

**Définition 1.10 (Produit Cartésien des sous-ensembles flous).** [12] Soient les sous-ensembles flous  $A_1, A_2, \dots, A_n$  respectivement définis sur  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , on définit leur produit cartésien  $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ , comme un sous-ensemble flou de  $X$  de fonction d'appartenance définit pour toute  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X$  par :

$$\mu_A(x) = \min(\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2), \dots, \mu_{A_n}(x_n)).$$

**Exemple 1.10.** Soient  $X_1 = \{a, b, c\}$ ,  $X_2 = \{\alpha, \beta\}$  et soient  $A_1, A_2$  deux sous-ensembles flous respectivement définis sur  $X_1$  et  $X_2$  donnée par :

$$\begin{aligned} A_1 &= \{\langle a, 0.2 \rangle; \langle b, 0.5 \rangle; \langle c, 0.8 \rangle\}. \\ A_2 &= \{\langle \alpha, 0.6 \rangle; \langle \beta, 0.4 \rangle\}. \end{aligned}$$

Alors, on obtient

$$A_1 \times A_2 = \{\langle (a, \alpha), 0.2 \rangle; \langle (a, \beta), 0.2 \rangle; \langle (b, \alpha), 0.5 \rangle; \langle (b, \beta), 0.4 \rangle; \langle (c, \alpha), 0.6 \rangle; \langle (c, \beta), 0.4 \rangle\}.$$

**Définition 1.11 (Projection d'un sous-ensemble flou).** [12] *La projection sur  $X_1$  de l'ensemble flou  $A$  de  $X_1 \times X_2$  est l'ensemble flou  $Proj_{X_1}(A)$  de  $X_1$ , dont la fonction d'appartenance est défini par :*

$$\forall x_1 \in X_1, \mu_{Proj_{X_1}(A)}(x_1) = \sup_{x_2 \in X_2} (\mu_A(x_1, x_2)).$$

*On définit de façon analogue la projection de  $A$  sur  $X_2$ .*

**Exemple 1.11.** *Soit  $X = X_1 \times X_2$  l'ensemble de référence telle que  $X_1$  et  $X_2$  deux ensembles de **Exemple 1.10**, on considère  $A_1 \times A_2 = A$  donné par  $A = \{ \langle (a, \alpha), 0.2 \rangle; \langle (a, \beta), 0.2 \rangle; \langle (b, \alpha), 0.5 \rangle; \langle (b, \beta), 0.4 \rangle; \langle (c, \alpha), 0.6 \rangle; \langle (c, \beta), 0.4 \rangle \}$ . Alors, on obtient*

$$\begin{aligned} Proj_{X_1}(A) &= \{ \langle a, \max(0.2, 0.2) \rangle; \langle b, \max(0.5, 0.4) \rangle; \langle c, \max(0.6, 0.4) \rangle \} \\ &= \{ \langle a, 0.2 \rangle; \langle b, 0.5 \rangle; \langle c, 0.6 \rangle \}; \\ Proj_{X_2}(A) &= \{ \langle \alpha, \max(0.2, 0.5, 0.6) \rangle; \langle \beta, \max(0.2, 0.4, 0.4) \rangle \} \\ &= \{ \langle \alpha, 0.6 \rangle; \langle \beta, 0.4 \rangle \}. \end{aligned}$$

### 1.2.5. Normes et conormes triangulaires

L'histoire des normes et conormes triangulaires (t-norme et t-conorme) a commencé avec "Menger" [11], son idée principale était de construire des espaces métrique où la distribution de probabilité qui sont utilisés pour décrire la distance entre deux éléments. Schweizer et Sklar [18] ont fourni les axiomes des normes triangulaires comme ils sont utilisés aujourd'hui.

**Définition 1.12 (Norme triangulaire).** [16] *Une norme triangulaire (t-norme) est une fonction  $T : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$  vérifiant :*

- (i) *Commutativité :  $\forall x, y \in [0, 1], T(x, y) = T(y, x)$  ;*
- (ii) *Associativité :  $\forall x, y, z \in [0, 1], T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z)$  ;*
- (iii) *Monotonie :  $\forall x, y, z \in [0, 1], (x \leq y) \Rightarrow T(x, z) \leq T(y, z)$  ;*
- (iv) *Élément neutre 1 :  $\forall x \in [0, 1], T(x, 1) = x$ .*

**Définition 1.13 (Conorme triangulaire).** [12] *Une conorme triangulaire (t-conorme) est une fonction  $S : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$  vérifiant :*

- (i) *Commutativité :  $\forall x, y \in [0, 1], S(x, y) = S(y, x)$ .*
- (ii) *Associativité :  $\forall x, y, z \in [0, 1], S(x, S(y, z)) = S(S(x, y), z)$ .*
- (iii) *Monotonie :  $\forall x, y, z \in [0, 1], (x \leq y) \Rightarrow S(x, z) \leq S(y, z)$ .*
- (iv) *Élément neutre 0 :  $\forall x \in [0, 1], S(x, 0) = x$ .*

**Remarque 1.2.** (i) *L'opérateur " min " satisfait ces propriétés donc on peut définir l'intersection de deux sous-ensembles flous par l'opérateur t-norme  $A \cap_T B$  telle que  $\mu_{A \cap_T B} = T(\mu_A, \mu_B)$ .*

(ii) L'opérateur "max" satisfait ces propriétés donc on peut définir l'union de deux sous-ensembles flous par l'opérateur  $t$ -conorme  $A \cup_S B$  telle que  $\mu_{A \cup_S B} = S(\mu_A, \mu_B)$ .

(iii) Soit  $T$  une norme triangulaire, l'application  $S$  définit comme

$$S : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$$

$$S(x, y) = 1 - T(1 - x, 1 - y)$$

est le dual  $t$ -conorme de  $T$ .

**Définition 1.14 (L'opérateur négation).** [12] Une négation est une fonction  $N : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$  vérifiant :

(i)  $N(0) = 1$  et  $N(1) = 0$ .

(ii) Monotonie  $\forall x, y \in [0, 1], x \leq y \Rightarrow N(y) \leq N(x)$ .

**Remarque 1.3.** (i) Une négation  $N$  est dite négation strict si elle est strictement décroissante c-à-d,  $x < y \Rightarrow N(y) < N(x)$ .

(ii) Une négation strict est dit négation fort si elle est involutive c-à-d,  $N(N(x)) = x$ .

**Définition 1.15 (Dualité entre opérateurs).** [12] Une  $t$ -norme  $T$  et une  $t$ -conorme  $S$  sont dites duales pour la négation strict  $N$  si elles satisfaisant les formules suivantes pour tous  $x$  et  $y$  de  $[0, 1]$  :

$$S(x, y) = N(T(N(x), N(y))).$$

$$T(x, y) = N(S(N(x), N(y))).$$

**Exemple 1.12. (Différentes normes et conormes triangulaires)**

$t$ -norme	$t$ -conorme	nom
$\min(x, y)$	$\max(x, y)$	Zadeh
$\max(x + y - 1, 0)$	$\min(x + y, 1)$	Lukasiewicz
$\frac{xy}{\gamma + (1-\gamma)(x+y-xy)}$	$\frac{x+y-xy-(1-\gamma)xy}{1-(1-\gamma)xy}$	Hamacher ( $\gamma > 0$ )
$xy$	$x + y - xy$	Probabiliste
$\max(1 - ((1-x)^p + (1-y)^p)^{\frac{1}{p}}, 0)$	$\min((x^p + y^p)^{\frac{1}{p}}, 1)$	Yager ( $p \geq 0$ )
$\max((x + y - 1 + \lambda xy)/(1 + \lambda), 0)$	$\min(x + y + \lambda xy, 1)$	Weber ( $\lambda > -1$ )
$\begin{cases} x \text{ si } y = 1 ; \\ y \text{ si } x = 1 ; \\ 0 \text{ si non.} \end{cases}$	$\begin{cases} x \text{ si } y = 0 ; \\ y \text{ si } x = 0 ; \\ 1 \text{ si non.} \end{cases}$	Drastique

**Exemple 1.13.** Soit  $X = \{a, b, c\}$ , soient  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles flous de  $X$  telle que  $A = \{\langle a, 0.3 \rangle; \langle b, 0.4 \rangle; \langle c, 0.7 \rangle\}$ ,  $B = \{\langle a, 0.5 \rangle; \langle b, 0.2 \rangle; \langle c, 0.8 \rangle\}$ . On peut utiliser les opérateurs de Lukasiewicz pour définit l'intersection et l'union par :

(i)  $\mu_{A \cap_T B}(x) = T(\mu_A, \mu_B) = \max(\mu_A(x) + \mu_B(x) - 1, 0), \forall x \in X$  ;

$$(ii) \mu_{A \cup_S B}(x) = S(\mu_A, \mu_B) = \min(\mu_A(x) + \mu_B(x), 1), \forall x \in X.$$

Alors, on obtient

$$(i) A \cap_T B = \{\langle a, 0 \rangle; \langle b, 0 \rangle; \langle c, 0.5 \rangle\}.$$

$$(ii) A \cup_S B = \{\langle a, 0.8 \rangle; \langle b, 0.6 \rangle; \langle c, 1 \rangle\}.$$

**Remarque 1.4.** (i) L'opérateur "min" est la plus grande des  $t$ -normes telle que pour tout  $x$  et  $y$  dans  $[0, 1]$  on obtient,

$$T(x, y) \leq \min(x, y).$$

Si l'opérateur  $t$ -norme vérifie l'idempotence donc elle est coïncide l'opérateur "min"  $c$ -à- $d$ , pour tout  $x$  et  $y$  dans  $[0, 1]$  on obtient,

$$T(x, y) = \min(x, y).$$

(ii) L'opérateur "max" est la plus petite des  $t$ -conormes telle que pour tout  $x$  et  $y$  dans  $[0, 1]$  on obtient,

$$\max(x, y) \leq S(x, y).$$

Si l'opérateur  $t$ -conorme vérifie l'idempotence donc elle est coïncide l'opérateur "max"  $c$ -à- $d$ , pour tout  $x$  et  $y$  dans  $[0, 1]$  on obtient,

$$S(x, y) = \max(x, y).$$

(iii) Toute  $t$ -norme  $T$  et toute  $t$ -conorme  $S$  vérifient pour tout  $x$  et  $y$  dans  $[0, 1]$  les inégalités suivantes :

$$T_{drastique} \leq T(x, y) \leq \min(x, y) ;$$

$$\max(x, y) \leq S(x, y) \leq S_{drastique}.$$

(iv) Tous les  $t$ -norme coïncident dans les valeurs de bords de l'intervalle  $[0, 1]$   $c$ -à- $d$ , (0 et 1)

$$T(0, 0) = T(1, 0) = T(0, 1) = 0, T(1, 1) = 1.$$

(v) Tous les  $t$ -conorme coïncident dans les valeurs de bords de l'intervalle  $[0, 1]$   $c$ -à- $d$ , (0 et 1)

$$S(1, 1) = S(1, 0) = S(0, 1) = 1, S(0, 0) = 0.$$

**Définition 1.16 (Image directe).** [22] Soit  $f : X \rightarrow Y$  une fonction. Pour un ensemble flou  $A$  dans  $X$ ,  $f[A]$  est un ensemble flou dans  $Y$  donné par :

$$f[A](y) = \begin{cases} \sup_{z \in f^{-1}[y]} \{A(z)\} & \text{si } f^{-1}[y] \text{ est non vide ;} \\ 0 & \text{si } f^{-1}[y] \text{ est vide.} \end{cases}$$

Pour tout  $y \in Y$ .

**Définition 1.17 (Image réciproque).** [22] Soit  $f : X \rightarrow Y$  une fonction. Pour un ensemble flou  $B$  dans  $Y$ ,  $f^{-1}[B]$  est un ensemble flou dans  $X$  donné par :

$$f^{-1}[B](x) = B(f(x)).$$

Pour tout  $x \in X$ .

**Exemple 1.14.** Soient  $X = \{a, b, c\}$  et  $Y = \{d, e, g\}$ . Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles flous sur  $X$  donnés par :

$$A = \{\langle a, 0.5 \rangle; \langle b, 0.3 \rangle; \langle c, 0.9 \rangle\} \subseteq X, \quad B = \{\langle d, 0.2 \rangle; \langle e, 0.7 \rangle; \langle g, 0.11 \rangle\} \subseteq Y.$$

Soit  $f : X \rightarrow Y$  une fonction définie par  $f(a) = d$ ,  $f(b) = d$ ,  $f(c) = e$ . Alors,

1. On a  $f^{-1}(d) = \{a, b\} \neq \emptyset$ , alors :  
 $f[A](d) = \sup\{A(x) : x \in f^{-1}(d)\} = \sup\{A(a), A(b)\} = 0.5$ .  
On a aussi  $f^{-1}(e) = \{c\} \neq \emptyset$ , alors :  
 $f[A](e) = \sup\{A(x) : x \in f^{-1}(e)\} = \sup\{A(c)\} = 0.9$ .  
et on a  $f^{-1}(g) = \emptyset$ , alors  $f[A](g) = 0$ . Donc,  $f[A] = \{\langle d, 0.5 \rangle; \langle e, 0.9 \rangle; \langle g, 0 \rangle\}$ .
2. On a  $f^{-1}[B](a) = B(f(a)) = B(d) = 0.2$ .  
On a aussi  $f^{-1}[B](b) = B(f(b)) = B(d) = 0.2$ .  
et on a  $f^{-1}[B](c) = B(f(c)) = B(e) = 0.7$ . Donc,  $f^{-1}[B] = \{\langle a, 0.2 \rangle; \langle b, 0.2 \rangle; \langle c, 0.7 \rangle\}$ .





---

## 2 Généralités sur les relations floues

Les relations floues sont d'une importance fondamentale dans presque tous les sous-domaines de la logique floue et de la théorie des ensembles flous, ils sont compris une modélisation préférentielle floue, mathématiques flou, inférence floue, et plus encore. Dans le cadre générale, les relations floues sont des ensembles du produit cartésien de domaines non vides vers l'intervalle d'unité.

### 2.1. Rappels sur les relations classique

---

Tout d'abord, on va parler sur les notions de base d'une relation classique avec quelques exemples.

**Définition 2.1 (Relation classique).** Soient  $X$  et  $Y$  deux ensembles non vides, une relation binaire  $\mathcal{R}$  entre deux ensembles  $X$  et  $Y$  est une partie de  $X \times Y$ . Pour  $(x, y) \in \mathcal{R} \subseteq X \times Y$ , on note  $x\mathcal{R}y$ .

**Définition 2.2 (Propriétés d'une relation classique).** [1] Soit  $\mathcal{R}$  une relation binaire sur un ensemble non vide  $X$  ( $\mathcal{R}$  une partie de  $X \times X$ )

- (i)  $\mathcal{R}$  est réflexive  $\Leftrightarrow \forall x \in X, x\mathcal{R}x$  ;
- (ii)  $\mathcal{R}$  est symétrique  $\Leftrightarrow \forall x, y \in X, x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$  ;
- (iii)  $\mathcal{R}$  est antisymétrique  $\Leftrightarrow \forall x, y \in X, (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y$  ;
- (iv)  $\mathcal{R}$  est transitive  $\Leftrightarrow \forall x, y, z \in X, (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$  ;

Si  $\mathcal{R}$  est réflexive, symétrique et transitive,  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence sur  $X$ . Si  $\mathcal{R}$  est réflexive, antisymétrique et transitive,  $\mathcal{R}$  est une relation d'ordre sur  $X$ . On dit que cette relation d'ordre est partielle et on la note  $\preceq$ , s'il existe au moins deux éléments  $x, y \in X$  tels que  $x \not\preceq y$  et  $y \not\preceq x$ , et on appelle le couple  $(X, \preceq)$  ensemble partiellement ordonné. Si pour tout  $x, y \in X$ ,  $x \preceq y$  ou  $y \preceq x$  la relation d'ordre est dite totale ou linéaire, et le couple  $(X, \preceq)$  est dit ensemble totalement ordonné.

**Exemple 2.1.** (1) La relation de divisibilité ( $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \mid y$ ) est un ordre partiel sur  $\mathbb{N}^*$ .

(2) L'ordre usuelle  $\leq$  est un ordre total dans les ensembles  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$  et  $\mathbb{R}$ .

(3) Pour n'importe quel ensemble la relation d'égalité ( $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x = y$ ) est réflexive, symétrique, antisymétrique et transitive.

## 2.2. Relations floues

Dans cette section, nous donnons des définitions et propriétés de base sur les relations floues.

### 2.2.1. Définitions de base des relations floues

Dans cette partie, on va voir la définition d'une relation floue et son inverse avec quelques exemples.

**Définition 2.3 (Relation floue).** [25] *Une relation floue  $\mathcal{R}$  entre deux ensembles de références  $X$  et  $Y$  est un sous-ensemble flou de produit cartésien  $X \times Y$ , de fonction d'appartenance  $\mu_{\mathcal{R}} : X \times Y \longrightarrow [0, 1]$ , ou simplement  $\mathcal{R}(x, y)$  qui est appelé le degré de relation entre  $x$  et  $y$ .*

$$\mathcal{R} = \{ \langle (x, y), \mathcal{R}(x, y) \rangle \mid (x, y) \in X \times Y \}.$$

#### Cas particulier :

- (i) Si  $X = Y$ , une relation floue  $\mathcal{R}$  définit sur les deux univers  $X$  et  $Y$  est une relation binaire floue définit sur  $X$ .
- (ii) Si  $X$  et  $Y$  sont finis, une relation floue  $\mathcal{R}$  définit sur les deux univers  $X$  et  $Y$  peut être décrite par la matrice  $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}$  des valeurs de sa fonction d'appartenance, les coefficients de  $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}$  indiqué sur la ligne  $x$  et la colonne  $y$  ayant pour valeur  $\mathcal{R}(x, y)$ , pour tous  $x$  de  $X$  et  $y$  de  $Y$ .

**Exemple 2.2.** Soit  $X = \{1, 2, 3, 4\}$ , la relation  $\mathcal{R}$  "Approximativement égale à" peut être définie par :

$$\mathcal{R} : \{1, 2, 3, 4\} \times \{1, 2, 3, 4\} \longrightarrow [0, 1]$$

$$(x, y) \longmapsto \mathcal{R}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = y ; \\ 0.7, & \text{si } |x - y| = 1 ; \\ 0.3, & \text{si } |x - y| = 2 ; \\ 0.5, & \text{si } |x - y| = 3. \end{cases}$$

On peut la représenté par le tableau suivant :

$\mathcal{R}$	1	2	3	4
1	1	0.7	0.3	0.5
2	0.7	1	0.7	0.3
3	0.3	0.7	1	0.7
4	0.5	0.3	0.7	1

**Définition 2.4 (L'inverse d'une Relation floue).** [25] Soit  $\mathcal{R}$  une relation floue entre  $X$  et  $Y$ , on définit  $\mathcal{R}^t$  entre  $Y$  et  $X$  par

$$\mathcal{R}^t(y, x) = \mathcal{R}(x, y).$$

$\mathcal{R}^t$  est la relation inverse de  $\mathcal{R}$ .

**Cas particulier :** Si  $X$  et  $Y$  sont finis, la matrice  $\mathcal{M}_{\mathcal{R}^t}$  associée à l'inverse de la relation floue  $\mathcal{R}$  est la transposée de la matrice  $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}$ .

**Exemple 2.3.** La relation inverse  $\mathcal{R}^t$  de la relation binaire floue  $\mathcal{R}$  de **Exemple 2.2** sur  $X = \{1, 2, 3, 4\}$  on va le définir ce forme matricielle comme ci-dessous :

$\mathcal{R}^t$	1	2	3	4
1	1	0.7	0.3	0.5
2	0.7	1	0.7	0.3
3	0.3	0.7	1	0.7
4	0.5	0.3	0.7	1

**Remarque 2.1.** Les relations floues étant des cas particuliers des ensembles flous, toutes les propriétés et les définitions qui concernent les ensembles flous restent vraies pour les relation flous.

### 2.2.2. Opérations sur les relations floues

Etant donné deux relations floues  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{S}$  de  $X \times Y$ .

**Définition 2.5.** [13] Soient  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{S}$  deux relations floues, pour tous  $x, y$  dans  $X \times Y$  on peut définir

1.  $\mathcal{R} = \mathcal{S} \Leftrightarrow \mathcal{R}(x, y) = \mathcal{S}(x, y)$  ;
2.  $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S} \Leftrightarrow \mathcal{R}(x, y) \leq \mathcal{S}(x, y)$  ;
3.  $\mathcal{R} \cup \mathcal{S} = \{ \langle (x, y), \max(\mathcal{R}(x, y), \mathcal{S}(x, y)) \rangle \} = \{ \langle (x, y), \mathcal{R}(x, y) \vee \mathcal{S}(x, y) \rangle \}$  ;
4.  $\mathcal{R} \cap \mathcal{S} = \{ \langle (x, y), \min(\mathcal{R}(x, y), \mathcal{S}(x, y)) \rangle \} = \{ \langle (x, y), \mathcal{R}(x, y) \wedge \mathcal{S}(x, y) \rangle \}$  ;
5.  $\mathcal{R}^c = \{ \langle (x, y), 1 - \mathcal{R}(x, y) \rangle \}$ .

**Exemple 2.4.** Soient  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{S}$  deux relations floues sur  $X \times X$  telle que  $X = \{x, y, z\}$ , représentées par ses matrices  $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}$  et  $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}$  qui sont définis par les tableaux suivants

$\mathcal{R}$	$x$	$y$	$z$
$x$	1	0.7	0.4
$y$	0.5	1	0.2
$z$	0.1	0.6	1

$\mathcal{S}$	$x$	$y$	$z$
$x$	1	0.3	0
$y$	0.7	0.2	1
$z$	0.3	0	0.4

Les matrices  $\mathcal{M}_{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}}$  et  $\mathcal{M}_{\mathcal{R} \cap \mathcal{S}}$  corresponds aux relations floues  $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$  et  $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$  sont

$\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$	$x$	$y$	$z$
$x$	1	0.7	0.4
$y$	0.7	1	1
$z$	0.3	0.6	1

$\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$	$x$	$y$	$z$
$x$	1	0.3	0
$y$	0.5	0.2	0.2
$z$	0.1	0	0.4

Les relation complémentaires sont données par les tableaux suivants

$\mathcal{R}^c$	$x$	$y$	$z$
$x$	0	0.3	0.6
$y$	0.5	0	0.8
$z$	0.9	0.4	0

$\mathcal{S}^c$	$x$	$y$	$z$
$x$	0	0.7	1
$y$	0.3	0.8	0
$z$	0.7	1	0.6

**Proposition 2.1.** [13] Soient  $\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{Q}$  trois relations floues de  $X \times Y$  alors

1.  $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{R}^t \subseteq \mathcal{S}^t$  ;
2.  $(\mathcal{R} \cup \mathcal{S})^t = \mathcal{R}^t \cup \mathcal{S}^t$  ;
3.  $(\mathcal{R} \cap \mathcal{S})^t = \mathcal{R}^t \cap \mathcal{S}^t$  ;
4.  $(\mathcal{R}^t)^t = \mathcal{R}$  ;
5.  $\mathcal{R} \cap (\mathcal{S} \cup \mathcal{Q}) = (\mathcal{R} \cap \mathcal{S}) \cup (\mathcal{R} \cap \mathcal{Q})$  et  $\mathcal{R} \cup (\mathcal{S} \cap \mathcal{Q}) = (\mathcal{R} \cup \mathcal{S}) \cap (\mathcal{R} \cup \mathcal{Q})$  ;
6.  $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ ,  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ ,  $\mathcal{R} \cap \mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}$ ,  $\mathcal{R} \cap \mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}$  ;
7. si  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}$  et  $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{R}$  alors  $\mathcal{S} \cup \mathcal{Q} \subseteq \mathcal{R}$ ,  
si  $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$  et  $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{Q}$  alors  $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S} \cap \mathcal{Q}$ .

*Démonstration.* 1. Si  $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$ , alors  $\mathcal{R}(x, y) \leq \mathcal{S}(x, y)$ , et on a  $\mathcal{R}^t(y, x) = \mathcal{R}(x, y) \leq \mathcal{S}(x, y) = \mathcal{S}^t(y, x)$  pour tous  $x, y$  de  $X \times Y$ . Donc,  $\mathcal{R}^t \subseteq \mathcal{S}^t$ .

2. On a

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{R} \cup \mathcal{S})^t(y, x) &= (\mathcal{R} \cup \mathcal{S})(x, y) \\
 &= \mathcal{R}(x, y) \vee \mathcal{S}(x, y) \\
 &= \mathcal{R}^t(y, x) \vee \mathcal{S}^t(y, x) \\
 &= (\mathcal{R}^t \cup \mathcal{S}^t)(y, x).
 \end{aligned}$$

De la même manière on démontre  $(\mathcal{R} \cap \mathcal{S})^t = \mathcal{R}^t \cap \mathcal{S}^t$  et  $(\mathcal{R}^t)^t = \mathcal{R}$ .

5. Nous utilisons que les opérations  $\vee, \wedge$  satisfaisaient les propriétés de distribution, on obtient

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R} \cap (\mathcal{S} \cup \mathcal{Q}) &= \mathcal{R}(x, y) \wedge (\mathcal{S} \cup \mathcal{Q}(x, y)) \\
 &= \mathcal{R}(x, y) \wedge (\mathcal{S}(x, y) \vee \mathcal{Q}(x, y)) \\
 &= (\mathcal{R}(x, y) \wedge \mathcal{S}(x, y)) \vee (\mathcal{R}(x, y) \wedge \mathcal{Q}(x, y)) \\
 &= (\mathcal{R} \cap \mathcal{S})(x, y) \cup (\mathcal{R} \cap \mathcal{Q})(x, y) \\
 &= ((\mathcal{R} \cap \mathcal{S}) \cup (\mathcal{R} \cap \mathcal{Q}))(x, y).
 \end{aligned}$$

□

### 2.2.3. Composition des relations floues

La connaissance de deux relations floues, l'une entre  $X$  et  $Y$  et l'autre entre  $Y$  et  $Z$  permet d'établir une relation entre  $X$  et  $Z$ , comme dans le cas des relations classiques.

**Définition 2.6.** [12, 25] *La composition de deux relations floues  $\mathcal{R}$  sur  $X \times Y$  et  $\mathcal{Q}$  sur  $Y \times Z$  définit une relation floue  $\mathcal{S} = \mathcal{R} \circ \mathcal{Q}$  sur  $X \times Z$  de fonction d'appartenance définie par :*

$$\forall (x, z) \in X \times Z, \mathcal{S}(x, z) = \sup_{y \in Y} (\min(\mathcal{R}(x, y), \mathcal{Q}(y, z))).$$

**Exemple 2.5.** *Considérons les relations floues  $\mathcal{R} \subseteq X \times Y$  et  $\mathcal{Q} \subseteq Y \times Z$  définies par ses tableaux suivants*

$\mathcal{R}(x, y)$	$y_1$	$y_2$	$y_3$
$x_1$	0.1	0.3	0
$x_2$	0.8	1	0.3

$\mathcal{Q}(y, z)$	$z_1$	$z_2$	$z_3$
$y_1$	0.8	0.2	0
$y_2$	0.2	1	0.6
$y_3$	0.5	0	0.4

*Le composé des relations  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{Q}$  est le suivants*

$\mathcal{R} \circ \mathcal{Q}(x, y)$	$z_1$	$z_2$	$z_3$
$x_1$	0.2	0.3	0.3
$x_2$	0.8	1	0.6

### 2.2.4. Propriétés particulières des relations floues

Comme les relations classiques, il existe certaines propriétés particuliers des relations floues  $\mathcal{R}$  définies sur  $X \times X$ .

**Définition 2.7.** [12, 25] Une relation floue  $\mathcal{R}$  sur  $X \times X$  est dite :

- (i) *Réflexive*, si pour tout  $x \in X$   $\mathcal{R}(x, x) = 1$ .
- (ii) *Irréflexive*, si pour tout  $x \in X$   $\mathcal{R}(x, x) = 0$ .
- (iii) *Non-réflexive*, s'il existe  $x \in X$   $\mathcal{R}(x, x) = 0$ .
- (iv) *Symétrique*, si pour tout  $x, y \in X$   $\mathcal{R}(x, y) = \mathcal{R}(y, x)$ .
- (v) *Asymétrique*, si pour tout  $(x, y) \in X^2$   $\mathcal{R}(x, y) \wedge \mathcal{R}(y, x) = 0$ , avec  $x \neq y$ .
- (vi) *Antisymétrique*, si pour tout  $x \neq y$   $\mathcal{R}(x, y) \wedge \mathcal{R}(y, x) = 0$ .
- (vii) *T-Antisymétrique*, si pour tout  $x \neq y$   $T(\mathcal{R}(x, y), \mathcal{R}(y, x)) = 0$ , avec  $T$  est un  $t$ -norme.
- (viii) *Transitive*, si pour tout  $x, y, z \in X$   $\mathcal{R}(x, y) \wedge \mathcal{R}(y, z) \leq \mathcal{R}(x, z)$ .
- (ix) *T-Transitive*, si pour tout  $x, y, z \in X$   $T(\mathcal{R}(x, y), \mathcal{R}(y, z)) \leq \mathcal{R}(x, z)$ , avec  $T$  est un  $t$ -norme.
- (x) *Séparable*, si pour tout  $x, y \in X$   $\mathcal{R}(x, y) = 1$  alors,  $x = y$ .
- (xi) *Complé*, si pour tout  $x, y \in X$   $\mathcal{R}(x, y) \vee \mathcal{R}(y, x) = 1$ .

**Exemple 2.6.** Soit  $X = \{a, b, c, d\}$ ,  $\mathcal{R}$  est une relation floue définie sur  $X$  comme suivant :

$\mathcal{R}(x, y)$	1	2	3	4
1	1	0.6	0.3	0
2	0.6	1	0.5	0.1
3	0.3	0.5	1	0.4
4	0	0.1	0.4	1

$\mathcal{R}$  est une réflexive, symétrique, et non transitive car  $(\mathcal{R}(4, 2) \wedge \mathcal{R}(2, 1) \not\leq \mathcal{R}(4, 1))$ .

**Définition 2.8 (Les  $\alpha$ -coupes d'une relation floue).** [6] Soit  $\mathcal{R} : X^2 \rightarrow [0, 1]$  une relation floue, un  $\alpha$ -coupe de  $\mathcal{R}$  est un sous ensemble classique (relation ordinaire)  $\mathcal{R}_\alpha$  de  $X^2$ , telle que

$$\mathcal{R}_\alpha(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathcal{R}(x, y) \geq \alpha ; \\ 0 & \text{si } \mathcal{R}(x, y) < \alpha. \end{cases}$$

**Lemme 2.1.** Soit  $\mathcal{R}$  une relation floue sur  $X$ . Alors pour tout  $x, y$  dans  $X$

$$\mathcal{R}_\alpha(x, y) = \sup_{\alpha \in ]0, 1]} (\alpha \cdot \mathcal{R}_\alpha(x, y)).$$

*Démonstration.* Évident d'après **Théorème 1.1**

□

**Exemple 2.7.** *Considérons la relation floue  $\mathcal{R}$  de  $X^2$  définie par sa tableau*

$\mathcal{R}$	$x$	$y$	$z$
$x$	1	0.3	0.4
$y$	0	1	0.5
$z$	0.2	0.7	1

*On définit  $\mathcal{R}_{0.4}$  par le tableau suivant*

$\mathcal{R}_{0.4}$	$x$	$y$	$z$
$x$	1	0	0.4
$y$	0	1	1
$z$	0	1	1

*Donc,  $\mathcal{R}_{0.4}$  est un ensemble classique (relation ordinaire) associé à la relation flou  $\mathcal{R}$ .*

### 2.2.5. Classes particulières des relations floues

Dans ce que suite, on va abordé à les classes d'une relation, la relation d'ordre floue et la relation d'équivalence floue, la différence principale entre les deux classes c'est la symétrie et l'antisymétrie, pour plus voir [26, 25].

### Relation d'équivalence floue

Dans cette partie, on va voir la notion d'une relation d'équivalence floue et quelques exemples.

**Définition 2.9 (Relation d'équivalence floue).** *Une relation floue  $\mathcal{R}$  sur  $X$  est une relation d'équivalence floue si elle est réflexive, symétrique et transitive.*

**Exemple 2.8.** *Soit  $X = \{a, b, c, d\}$ , et soit  $\mathcal{R}$  la relation flou définit par le tableau suivant :*

$\mathcal{R}$	$a$	$b$	$c$	$d$
$a$	1	0.2	0.4	0.5
$b$	0.2	1	0.6	0.8
$c$	0.4	0.6	1	0.3
$d$	0.5	0.8	0.3	1

*Alors,  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence floue.*

## Relation d'ordre floue

Une relation d'ordre classique est réflexive, antisymétrique, et transitive. Dans ce que suit on va voir plusieurs types fondamentaux d'une relation d'ordre flou.

**Définition 2.10 (L'ordre flou).** [25] Une relation floue  $\mathcal{R}$  sur  $X$  est un ordre flou si les conditions suivantes sont vérifiées :

- (i) Réflexive, si pour tout  $x \in X$   $\mathcal{R}(x, x) = 1$ .
- (ii) Antisymétrique, si pour tout  $x \neq y$   $\mathcal{R}(x, y) \wedge \mathcal{R}(y, x) = 0$ .
- (iii) Transitive, si pour tout  $x, y, z \in X$   $\mathcal{R}(x, y) \wedge \mathcal{R}(y, z) \leq \mathcal{R}(x, z)$ .

Dans ce cas, le couple  $(X, \mathcal{R})$  est dit ensemble ordonné flou ou bien ensemble partiellement ordonné flou (poset flou).

**Exemple 2.9.** Soit  $X = \{a, b, c, d\}$ , le sous-ensemble flou  $\mathcal{R}$  définit sur  $X$  par le tableau suivant :

$\mathcal{R}$	$a$	$b$	$c$	$d$
$a$	1	0.6	0.8	0.8
$b$	0	1	0	0.2
$c$	0	0.6	1	0.4
$d$	0	0	0	1

Alors,  $\mathcal{R}$  est un ordre flou sur  $X$ .

**Définition 2.11 (Pré-ordre flou).** [25] Un pré-ordre flou  $\mathcal{R}$  est une relation floue dans  $X$  qui est réflexive et transitive.

**Exemple 2.10.** Soit  $X = \{a, b, c, d\}$ , le sous-ensemble flou  $\mathcal{R}$  définit sur  $X$  par le tableau suivant :

$\mathcal{R}$	$a$	$b$	$c$	$d$
$a$	1	0.6	0.8	0.8
$b$	0.2	1	0	0.2
$c$	0	0.6	1	0.4
$d$	0	0	0	1

Alors,  $\mathcal{R}$  est un pré-ordre flou sur  $X$ .

**Définition 2.12 (Ordre flou strict).** [25] Un ordre flou strict  $\mathcal{R}$  est une relation floue dans  $X$  qui est irréflexive et transitive.

**Exemple 2.11.** Soit  $X = \{a, b, c, d\}$ , le sous-ensemble flou  $\mathcal{R}$  définit sur  $X$  par le tableau suivant :

$\mathcal{R}$	$a$	$b$	$c$	$d$
$a$	0	0.6	0.8	0.8
$b$	0.2	0	0	0.2
$c$	0	0.6	0	0.4
$d$	0	0	0	0



Alors,  $\mathcal{R}$  est un ordre flou strict sur  $X$ .

**Définition 2.13 (L'ordre flou total).** [25] Une relation d'ordre floue total  $\mathcal{R}$  ou ordre flou linéaire est un ordre flou sur  $X$  telle que pour tout  $x, y \in X$ ,  $\mathcal{R}(x, y) > 0$  ou  $\mathcal{R}(y, x) > 0$ . Dans ce cas le couple  $(X, \mathcal{R})$  est dit ensemble totalement ordonné flou ou bien une chaîne floue.

**Exemple 2.12.** Soit  $\mathcal{R}$  une relation flou de **Exemple 2.9** donnée par :

$\mathcal{R}$	$a$	$b$	$c$	$d$
$a$	1	0.6	0.8	0.8
$b$	0	1	0	0.2
$c$	0	0.6	1	0.4
$d$	0	0	0	1

Alors,  $\mathcal{R}$  est un ordre flou total.



---

## 3 Espaces topologiques flous

Dans ce chapitre, on va traiter le concept de topologie floue introduit par C. L. Chang [2] comme une généralisation du topologie classique. Dans ce sens, on va étudier quelques notions liés à la topologie floue comme les voisinages, points d'accumulations, les points d'adhérences,...etc. Finalement, on va abordé la notion du topologie floue généré par une relation floue et quelques types particuliers des topologies floues.

### 3.1. Topologie floue : Définitions et exemples

---

Dans cette section, on donnons des notions de base dans un espace topologique flou. Pour plus de détaille voir [2, 17].

**Définition 3.1.** [2] *Une topologie floue est une famille  $T$  d'ensembles flous dans  $X$  qui satisfait les conditions suivantes :*

- (a)  $\emptyset, X \in T$  ;
- (b) si  $A, B \in T$ , alors  $A \cap B \in T$  ;
- (c) si  $A_i \in T$  pour tout  $i \in I$ , alors  $\bigcup_I A_i \in T$ .

$T$  s'appelle une topologie floue sur  $X$ , et le paire  $(X, T)$  est un espace topologique flou.

Le sense flou dans la définition de Chang n'est pas clair, pour cela on va fuzzifier (donner une deuxième version floue) de cette définition du topologie floue avec

$$X = \{\langle x, 1 \rangle : x \in X\} ;$$

$$\emptyset = \{\langle x, 0 \rangle : x \in X\}.$$

**Définition 3.2.** *Soit  $X$  un ensemble. Une topologie floue  $\tau$  sur  $X$  est définit par la fonction*

$$\begin{aligned} \tau : [0, 1]^X &\longrightarrow [0, 1] ; \\ A &\longmapsto \mu_\tau(A) \end{aligned}$$

*et satisfait les conditions suivantes :*

- (i)  $\mu(\emptyset) = \mu(X) = 1$  ;
- (ii)  $\mu_A(x) \wedge \mu_B(x) \leq \mu_{A \cap B}(x)$ , pour tout deux sous-ensembles flous dans  $[0, 1]^X$  ;
- (iii)  $\mu_\tau(A_i) \leq \mu_\tau(\bigvee_{i \in I} A_i)$ , pour tout famille des sous-ensembles flous  $A_i$  dans  $[0, 1]^X$ .

$\tau$  s'appelle une topologie floue sur  $X$ , et le paire  $(X, \tau)$  appelé espace topologique flou.

**Définition 3.3 (Ouvert flou et fermé flou).** [2] Soit  $(X, \tau)$  un espace topologique flou.

(i) Chaque élément de  $(X, \tau)$  s'appelle un ouvert flou.

(ii) Un fermé flou si et seulement si son complément est un ouvert flou.

**Exemple 3.1 (Cas fini).** Soient  $X = \{a, b\}$  et  $A$  est un sous-ensemble flou sur  $X$  donné par  $A = \{\langle a, 0.5 \rangle; \langle b, 0.4 \rangle\}$ , alors  $\tau = \{\emptyset, A, X\}$  est une topologie floue. Et  $(X, \tau)$  est un espace topologique flou. Dans cet exemple,  $A$  est un ouvert flou et  $\emptyset, X$  sont des ouverts flous et fermés flous ou même temps.

**Exemple 3.2 (Cas infini).** Soit  $X = [0, 1]$  et soit  $h \in ]0, 1]$ , on considère la fonction suivante

$$f_h(x) = \begin{cases} 2hx & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}] ; \\ 2h(1-x) & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

La famille  $\tau = \{f_h : 0 < h \leq 1\} \cup \{\emptyset, X\}$  est une topologie floue, et  $(X, \tau)$  est un espace topologique flou.

**Remarque 3.1.** (i) La topologie floue discrète contient seulement l'ensemble vide et l'ensemble de référence ;

(ii)  $\tau_1$  est plus fine qu'une topologie floue  $\tau_2$  si et seulement si  $\tau_1 \subset \tau_2$ .

**Définition 3.4 (Voisinage flou).** [2] Un ensemble flou  $U$  dans un espace topologique flou  $(X, T)$  est un voisinage d'un ensemble flou  $A$  si et seulement s'il existe un ouvert flou  $O$  tels que  $A \subset O \subset U$ .

**Remarque 3.2.** Tout ouvert flou est un voisinage flou de ses éléments.

**Définition 3.5 (Point flou).** Soit  $X$  est un ensemble flou et  $x \in X$ . On définit le point flou  $P_x$  par la fonction d'appartenance suivante

$$P_x(y) = \begin{cases} 0 & \text{pour tout } y \in X \mid y \neq x ; \\ \lambda & \text{si } y = x. \end{cases}$$

avec  $\lambda \in ]0, 1]$ .

**Définition 3.6.** Soient  $X$  un ensemble et  $A$  un sous-ensemble flou de  $X$ . On dit que le point  $P_x^\lambda$  est appartient à  $A$  si et seulement si  $P_x^\lambda(x) \leq \mu_A(x)$ . On note par  $P_x^\lambda \tilde{\in} A$  si le point flou  $P_x$  appartient à l'ensemble flou  $A$ .

**Exemple 3.3.** Soit  $X = \{x, y, z\}$  et soit  $A$  un sous-ensemble flou de  $X$  définie par  $A = \{\langle x, 0.1 \rangle; \langle y, 0.3 \rangle; \langle z, 0.5 \rangle\}$ .

Soit  $z \in X$

$$P_z(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq z ; \\ z & \text{si } t = z. \end{cases}$$

$P_t^z \tilde{\in} A$ , car  $P_z(z) \leq \mu_A(z) = 0.5$ .

**Remarque 3.3.** On peut éxprimé que  $P_x^\lambda \tilde{\in} A$  par  $x \in \text{Supp}(A)$ .

**Définition 3.7 (Fermeture).** [17] Soit  $(X, \tau)$  un espace topologique flou.  $A$  est un ensemble flou dans  $X$ . La fermeture de  $A$  est un ensemble flou  $\bar{A}$  définies par :

$$\bar{A} = \{\langle x, \max_{x \in X} \mu_A(x) \rangle \mid x \in X\}.$$

**Définition 3.8 (Intérieur).** [17] Soit  $(X, \tau)$  un espace topologique flou.  $A$  est un ensemble flou dans  $X$ . L'intérieur de  $A$  est un ensemble flou  $A^0$  définies par :

$$A^0 = \{\langle x, \min_{x \in X} \mu_A(x) \rangle \mid x \in X\}.$$

**Exemple 3.4.** [17] Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles flous de  $X = \mathbb{R}$  définis comme

$$A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} ; \\ 2x - 1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

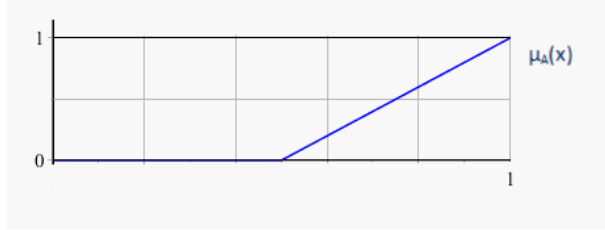


Figure 3.1

$$B(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{4} ; \\ -4x + 2 & \text{si } \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2} ; \\ 0 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

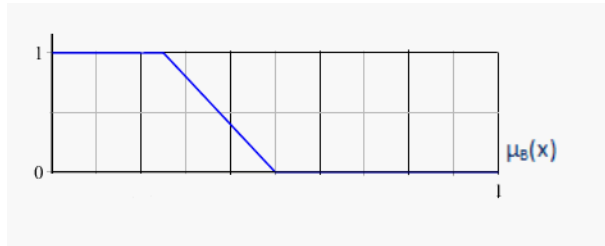


Figure 3.2

et la courbe de  $A \cup B(x)$  donnée par

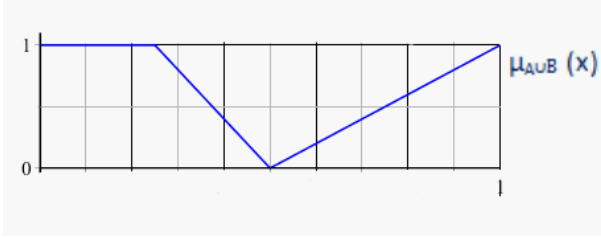


Figure 3.3

Alors,  $\tau = \{\emptyset, A, B, A \cup B, X\}$  est une topologie floue sur  $X$ , il est facile de voir que  $\bar{A} = B^c$ ,  $\bar{B} = A^c$ ,  $\bar{A} \cup \bar{B} = X$ ,  $(A^c)^0 = B$ ,  $(B^c)^0 = A$ , et  $((A \cup B)^c)^0 = \emptyset$ .

## 3.2. Voisinage, adhérence et point d'accumulation

Dans cette partie, on va donner des définitions de voisinage, adhérence, et point d'accumulation d'un ensemble flou dans un espace topologique flou.

**Définition 3.9.** [17] Soient  $(X, \tau)$  un espace topologique flou et  $A$  est un sous-ensemble flou dans  $X$ . Un point flou  $P_x^\lambda$  est dit quasi-coïncident avec  $A$ , dénoté par  $P_x^\lambda q A$ , si et seulement si  $\lambda > A^c(x)$ , ou  $\lambda + A(x) > 1$ .

**Définition 3.10.** [17] Soient  $(X, \tau)$  un espace topologique flou et  $A$  est un sous-ensemble flou dans  $X$ . Un sous-ensemble flou  $A$  dans  $(X, \tau)$  s'appelle un voisinage du point flou  $P_x^\lambda$  si et seulement s'il existe une  $B \in \tau$  tels que  $P_x^\lambda \tilde{\in} B \subseteq A$ . La famille des voisinages de  $P_x^\lambda$  est dite le système des voisinages de  $P_x^\lambda$ .

**Définition 3.11.** [17] Soient  $(X, \tau)$  un espace topologique flou et  $A$  est un sous-ensemble flou dans  $X$ . Un sous-ensemble flou  $A$  dans  $(X, \tau)$  s'appelle un  $Q$ -voisinage de point flou  $P_x^\lambda$  si et seulement s'il existe une  $B \in \tau$  tels que  $P_x^\lambda q B \subseteq A$ . La famille des  $Q$ -voisinages de  $P_x^\lambda$  est dite le système des  $Q$ -voisinages de  $P_x^\lambda$ .

**Proposition 3.1.** [17] Soient  $(X, \tau)$  un espace topologique flou et  $A, B$  deux sous-ensembles flous dans  $X$ . Alors,

- (i)  $A \subseteq B$  si et seulement si  $A$  et  $B^c$  ne sont pas quasi-coïncide ;
- (ii)  $P_x^\lambda \tilde{\in} A$  si et seulement si  $P_x^\lambda$  n'est pas quasi-coïncide avec  $A^c$ .

*Démonstration.* Soient  $A, B$  deux sous-ensembles flous dans  $X$ , avec  $A$  et  $B^c$  ne sont pas quasi-coïncident. Alors

- (i)  $\mu_A(x) + \mu_{B^c}(x) = \mu_A(x) + (1 - \mu_B(x)) \leq 1$ . Donc,  $\mu_A(x) \leq 1 - \mu_{B^c}(x)$ .  
Par conséquence,  $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ . Ce qui donne  $A \subseteq B$ .
- (ii) Soit  $P_x^\lambda \tilde{\in} A$ . Alors,  $\lambda \leq \mu_A(x)$ , ce qui implique  $\lambda + \mu_{A^c}(x) \leq \mu_A(x) + \mu_{A^c}(x)$ .  
Donc,  $\lambda + \mu_{A^c}(x) \leq 1$ .  
En conclusion,  $P_x^\lambda$  n'est pas quasi-coïncide avec  $A^c$ .

□

**Théorème 3.1.** [17] Soient  $(X, \tau)$  un espace topologique flou et  $A$  est un sous-ensemble flou dans  $X$ . Un point flou  $P_x^\lambda \tilde{\in} A^0$  si et seulement si  $P_x^\lambda$  un voisinage contenu dans  $A$ .

*Démonstration.* La démonstration est analogue de le cas classique. □

**Théorème 3.2.** [17] Soient  $(X, \tau)$  un espace topologique flou et  $A$  est un sous-ensemble flou dans  $X$ . Un point flou  $P_x^\lambda \tilde{\in} \overline{A}$  si et seulement si chaque  $Q$ -voisinage de  $P_x^\lambda$  est quasi-coïncide avec  $A$ .

*Démonstration.* Soit  $P_x^\lambda \tilde{\in} \overline{A}$ , donc  $P_x^\lambda \tilde{\in} F$  est un fermé flou dans  $A$  (c-à-d.  $\mu_F(x) \geq \lambda$ ). Ceci est équivalent de dire que si  $P_x^\lambda \tilde{\in} \overline{A}$ , alors  $P_x^\lambda \tilde{\in} O$ , tel que  $O$  est un ouvert flou dans  $A^c$  (c-à-d.  $\mu_O(x) \geq 1 - \lambda$ ). Par la négation, on trouve  $O \not\subseteq A^c$  (c-à-d.  $\mu_O(x) > 1 - \lambda$ ). D'après **Proposition 3.1**,  $O$  est un quasi-coïncide avec  $(A^c)^c = A$ . □

**Définition 3.12 (Adhérence).** [17] Soient  $(X, \tau)$  un espace topologique flou et  $A$  est un sous-ensemble flou dans  $X$ . Un point flou  $P_x^\lambda$  s'appelle un point d'adhérence d'un sous-ensemble flou  $A$ , si et seulement si, chaque  $Q$ -voisinage de  $P_x^\lambda$  est quasi-coïncide avec  $A$ .

**Théorème 3.3.** [17] Soient  $(X, \tau)$  un espace topologique flou et  $A$  est un sous-ensemble flou dans  $X$ . Alors

- (i)  $A^0 = (\overline{(A^c)})^c$  ;
- (ii)  $\overline{A} = ((A^c)^0)^c$  ;
- (iii)  $(\overline{A})^c = (A^c)^0$  ;
- (iv)  $\overline{(A^c)} = (A^0)^c$ .

*Démonstration.* Soient  $(X, \tau)$  un espace topologique flou et  $A$  est un sous-ensemble flou dans  $X$ , et soit  $\dot{A} = \{A_j : A_j \tilde{\in} \tau \text{ et } A_j \subset A\}$ , alors  $A^0 = \bigcup \dot{A}$ . Évidemment,  $\dot{A}^c = \{A^c : A_j \tilde{\in} \dot{A}\}$  est une famille de toute les fermés contenant  $A^c$  donc,  $\overline{A}^c = \bigcap \dot{A}^c$ . D'après la loi de Morgan, on a  $\overline{(\overline{A^c})} = (\bigcap (A^c))^c = \bigcup \{(A^c)^c\} = \bigcup A^0 = A^0$ . La preuve des autres est de même façon. □

**Définition 3.13 (Frontière).** [17] Soient  $(X, \tau)$  un espace topologique flou et  $A$  est un sous-ensemble flou dans  $X$ . Un point flou  $P_x^\lambda$  s'appelle un point de frontière d'un ensemble flou  $A$ , si et seulement si,  $P_x^\lambda \in \overline{A} \cap \overline{A^c}$ . L'union de tous les points de frontière de  $A$  s'appelle une frontière de  $A$ , dénoté par  $\mathcal{F}r(A)$ .

**Remarque 3.4.** Il est clair que  $\mathcal{F}r(A) = \overline{A} \cap \overline{A^c}$ .

**Proposition 3.2.** [17] Soit  $(X, \tau)$  un espace topologique flou et  $A$  est un sous-ensemble flou dans  $X$ . Alors,  $\overline{A} \subset \mathcal{F}r(A) \cup A$ .

*Démonstration.* Directe d'après la définition de  $\mathcal{F}r(A)$ . □

**Remarque 3.5.** L'inclusion inverse n'est pas vraie en générale. En effet, soit  $X$  un ensemble muni d'une topologie floue  $\tau = \{\emptyset, X, P_x^{1/2}\}$  avec  $x \in X$ , soit  $A = P_x^{2/3}$ , et  $B = P_x^{3/4}$ , alors le  $Q$ -voisinage de  $P_x^\lambda$  dans  $(X, \tau)$  sont  $X$  et  $P_x^{1/2}$ , qui sont tout les quasi-coïncident avec  $A$ . Donc, d'après **Théorème 3.2**  $B = \overline{A}$ . D'autre part,  $B \not\subset A$ .

**Définition 3.14 (Point d'accumulation).** [17] Soient  $(X, \tau)$  un espace topologique flou et  $A$  est un sous-ensemble flou dans  $X$ . Un point flou  $P_x^\lambda$  s'appelle un point d'accumulation d'un ensemble flou  $A$ , si et seulement si,  $P_x^\lambda$  est un point d'adhérence de  $A$  et chaque  $Q$ -voisinage de  $P_x^\lambda$  et  $A$  sont quasi-coïncident à certains élément de  $\text{Supp}(P_x^\lambda)$ . L'union de tous les points d'accumulation de  $A$  s'appelle l'ensemble dérivé de  $A$ , dénoté par  $A^d$ . Avec  $A^d \subset \overline{A}$ .

**Théorème 3.4.** [17]  $\overline{A} = A \cup A^d$ , ou  $A^d$  l'ensemble dérivé de  $A$ .

*Démonstration.* Soit  $\Omega = \{P_x^\lambda : P_x^\lambda \text{ est un adhérence de } A\}$ . Alors, d'après **Théorème 3.2**  $\overline{A} = \bigcup \Omega$ . D'autre part,  $P_x^\lambda \in \Omega$  et " $P_x^\lambda \in A$ " ou " $P_x^\lambda \notin A$ ", d'après **Définition 3.14** on a  $P_x^\lambda \in A^d$ , d'où  $\overline{A} = \bigcup \Omega \subset A \cup A^d$ .

L'inclusion inverse est clair. □

**Corollaire 3.1.** [17] Soient  $(X, \tau)$  un espace topologique flou et  $A$  est un sous-ensemble flou dans  $X$ .  $A$  est fermé si et seulement si  $A$  contient toute les points d'accumulations de  $A$ .

*Démonstration.* Soient  $(X, \tau)$  un espace topologique flou et  $A$  est un sous-ensemble flou dans  $X$ . D'après **Théorème 3.2** on a  $\overline{A} = A \cup A^d$  et comme  $A$  est fermé donc,  $A = \overline{A}$  par conséquent, si  $A = \overline{A} = A \cup A^d$ , alors  $A^d \subseteq A$ . Inversement, si  $A$  contient toute les points d'accumulations de  $A$ , alors  $A^d \subseteq A$  et comme  $\overline{A} = A \cup A^d$  donc  $\overline{A} = A$ . □



### 3.3. Topologie floue générée par une relation floue

En 2009, Knoblauch [7] à présenté la topologie classique générée par une relation binaire, récemment Mishra et Srivastava [14] ont généraliser cette étude dans le cas flou. D'abord, on présente quelques définitions pour abordé cette généralisation.

**Définition 3.15.** [14] *Soient  $X$  un ensemble et  $\mathcal{R}$  une relation floue sur  $X$ . Alors pour tout  $x \in X$ , on définit deux ensembles flous  $L_x$  et  $R_x$  par :*

$$L_x(y) = \mathcal{R}(y, x), \text{ pour tous } y \in X ;$$

$$R_x(y) = \mathcal{R}(x, y), \text{ pour tous } y \in X.$$

$L_x, R_x$  sont appelés contour inférieure et contour supérieure respectivement de l'élément  $x \in X$ .

La topologie floue générée par l'ensemble  $\mathcal{S}_1$  contient tous les contours inférieures (i.e.,  $\mathcal{S}_1 = \{L_x : x \in X\}$ ) dénoté par  $\tau_1$ , et la topologie floue générée par l'ensemble  $\mathcal{S}_2$  contient tous les contours supérieures (i.e.,  $\mathcal{S}_2 = \{R_x : x \in X\}$ ) dénoté par  $\tau_2$ .

**Définition 3.16.** [14] *Soient  $X$  un ensemble et  $\mathcal{R}$  une relation floue sur  $X$ . On définit  $\mathcal{S}$  par :*

$$\mathcal{S} = \{L_x\}_{x \in X} \cup \{R_x\}_{x \in X}.$$

La topologie floue qui est générée par l'ensemble  $\mathcal{S}$  s'appelle la topologie floue générée par la relation floue  $\mathcal{R}$  et dénoté par  $\tau_{\mathcal{R}}$ .

**Exemple 3.5.** *Soient  $X = \{x, y\}$  et  $\mathcal{R}$  une relation floue sur  $X$  donnée par*

$\mathcal{R}$	$x$	$y$
$x$	0.5	0.8
$y$	0.3	0.6

Alors,  $L_x, L_y, R_x$  et  $R_y$  sont des ensembles flous sur  $X$  donnés par :

$$L_x = \{\langle x, 0.5 \rangle; \langle y, 0.3 \rangle\} ;$$

$$L_y = \{\langle x, 0.8 \rangle; \langle y, 0.6 \rangle\} ;$$

$$R_x = \{\langle x, 0.5 \rangle; \langle y, 0.8 \rangle\} ;$$

$$R_y = \{\langle x, 0.3 \rangle; \langle y, 0.6 \rangle\}.$$

Donc,

$$\tau_1 = \{\emptyset, X, L_x, L_y\} ;$$

$$\tau_2 = \{\emptyset, X, R_x, R_y\} ;$$

et

$$\begin{aligned}\mathcal{S} &= \{ \{ \langle x, 0.5 \rangle; \langle y, 0.3 \rangle \}, \{ \langle x, 0.8 \rangle; \langle y, 0.6 \rangle \}, \{ \langle x, 0.5 \rangle; \langle y, 0.8 \rangle \}, \{ \langle x, 0.3 \rangle; \langle y, 0.6 \rangle \} \} \\ &= \{ L_x, L_y \} \cup \{ R_x, R_y \}.\end{aligned}$$

Donc,  $\tau_{\mathcal{R}} = \{ \emptyset, X, L_x, L_y, R_x, R_y, \{ \langle x, 0.3 \rangle; \langle y, 0.3 \rangle \}, \{ \langle x, 0.5 \rangle; \langle y, 0.6 \rangle \}, \{ \langle x, 0.8 \rangle; \langle y, 0.8 \rangle \} \}$ .

**Exemple 3.6.** Soient  $X = \{x, y, z\}$  et  $\mathcal{R}$  une relation floue sur  $X$  donnée par

$\mathcal{R}$	$x$	$y$	$z$
$x$	1	0.5	0
$y$	0	1	0.8
$z$	0.7	0	1

Alors,  $L_x$ ,  $L_y$ ,  $L_z$ ,  $R_x$ ,  $R_y$  et  $R_z$  sont des ensembles flous sur  $X$  donnés par :

$$\begin{aligned}L_x &= \{ \langle x, 1 \rangle; \langle y, 0 \rangle; \langle z, 0.7 \rangle \} ; \\ L_y &= \{ \langle x, 0.5 \rangle; \langle y, 1 \rangle; \langle z, 0 \rangle \} ; \\ L_z &= \{ \langle x, 0 \rangle; \langle y, 0.8 \rangle; \langle z, 1 \rangle \} ; \\ R_x &= \{ \langle x, 1 \rangle; \langle y, 0.5 \rangle; \langle z, 0 \rangle \} ; \\ R_y &= \{ \langle x, 0 \rangle; \langle y, 1 \rangle; \langle z, 0.8 \rangle \} ; \\ R_z &= \{ \langle x, 0.7 \rangle; \langle y, 0 \rangle; \langle z, 1 \rangle \}.\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \{ \emptyset, X, L_x, L_y, L_z \} ; \\ \tau_2 &= \{ \emptyset, X, R_x, R_y, R_z \} ;\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathcal{S} &= \{ \{ \langle x, 1 \rangle; \langle z, 0.7 \rangle \}, \{ \langle x, 0.5 \rangle; \langle y, 1 \rangle \}, \{ \langle y, 0.8 \rangle; \langle z, 1 \rangle \}, \{ \langle x, 1 \rangle; \langle y, 0.5 \rangle \}, \\ &\quad \{ \langle y, 1 \rangle; \langle z, 0.8 \rangle \}, \{ \langle x, 0.7 \rangle; \langle z, 1 \rangle \} \} \\ &= \{ L_x, L_y, L_z \} \cup \{ R_x, R_y, R_z \}.\end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned} \tau_{\mathcal{R}} = & \{ \{\emptyset, X, L_x, L_y, L_z, R_x, R_y, R_z, \{\langle x, 1 \rangle; \langle y, 1 \rangle; \langle z, 0.7 \rangle\}, \{\langle x, 0.5 \rangle\}, \\ & \{\langle z, 0.7 \rangle\}, \{\langle x, 1 \rangle; \langle y, 0.5 \rangle; \langle z, 0.7 \rangle\}, \{\langle x, 1 \rangle\}, \{\langle x, 1 \rangle; \langle y, 1 \rangle; \langle z, 0.8 \rangle\}, \\ & \{\langle x, 1 \rangle; \langle z, 1 \rangle\}, \{\langle x, 0.7 \rangle; \langle z, 0.7 \rangle\}, \{\langle x, 0.5 \rangle; \langle y, 1 \rangle; \langle z, 1 \rangle\}, \{\langle y, 0.8 \rangle\}, \\ & \{\langle x, 1 \rangle; \langle y, 1 \rangle\}, \{\langle x, 0.5 \rangle; \langle y, 0.5 \rangle\}, \{\langle x, 0.5 \rangle; \langle y, 1 \rangle; \langle z, 0.8 \rangle\}, \{\langle y, 1 \rangle\}, \\ & \{\langle x, 0.7 \rangle; \langle y, 1 \rangle; \langle z, 1 \rangle\}, \{\langle y, 0.5 \rangle\}, \{\langle y, 1 \rangle; \langle z, 1 \rangle\}, \{\langle y, 0.8 \rangle; \langle z, 0.8 \rangle\}, \\ & \{\langle x, 0.7 \rangle; \langle y, 0.8 \rangle; \langle z, 1 \rangle\}, \{\langle z, 1 \rangle\}, \{\langle x, 1 \rangle; \langle y, 0.5 \rangle; \langle z, 1 \rangle\}, \{\langle x, 0.7 \rangle\}, \\ & \{\langle z, 0.8 \rangle\}, \{\langle x, 1 \rangle; \langle y, 0.8 \rangle; \langle z, 1 \rangle\} \}. \end{aligned}$$

**Proposition 3.3.** [14] Soient  $X$  un ensemble et  $\mathcal{R}$  une relation floue sur  $X$ . Si  $\mathcal{R}$  est une relation floue symétrique, alors  $\tau_1 = \tau_2$ .

*Démonstration.* Si  $\mathcal{R}$  est une relation floue symétrique, alors  $\mathcal{R}(x, y) = \mathcal{R}(y, x)$ , pour chaque  $x, y \in X$ . Ceci implique que  $R_x(y) = L_x(y)$ , pour chaque  $x, y \in X$  et par conséquent  $R_x = L_x$  pour chaque  $x \in X$ . Ainsi les topologies  $\tau_1$  et  $\tau_2$  sont même.  $\square$

**Proposition 3.4.** [14] Soient  $X$  un ensemble et  $\mathcal{R}$  une relation floue sur  $X$ . Si  $\mathcal{R}$  est une relation pré-ordre floue, alors

1. Un ouvert flou de  $A \in \tau_2$ , alors  $\bigcup_{x:A(x)=1} L_x \subseteq A$ .
2. Un ouvert flou de  $A \in \tau_1$ , alors  $\bigcup_{x:A(x)=1} R_x \subseteq A$ .

*Démonstration.* 1. Pour montrer que  $\bigcup_{x:A(x)=1} L_x \subseteq A$ , soit  $y_r \in \bigcup_{x:A(x)=1} L_x$ . Ceci implique qu'il existe un certain  $x$  tels que  $A(x) = 1$  et  $y_r \in L_x$ . Ainsi  $r < \mathcal{R}(y, x)$ . Comme  $A$  est un ouvert et  $A(x) = 1$ , ainsi  $x_r \in A$  et comme  $A$  est un ouvert flou  $\bigcap_{i=1}^n L_{x_i}$  tels que

$$\begin{aligned} x_r & \in \bigcap_{i=1}^n L_{x_i} \subseteq A \\ \Rightarrow & r < \mathcal{R}(x, x_i), \text{ pour tout } i = 1, 2, \dots, n \\ \Rightarrow & r < \min\{\mathcal{R}(y, x), \mathcal{R}(x, x_i)\} \leq \mathcal{R}(y, x_i), \text{ pour tout } i = 1, 2, \dots, n \\ \Rightarrow & y_r \in L_{x_i}, \text{ pour tout } i = 1, 2, \dots, n \\ \Rightarrow & y_r \in \bigcap_{i=1}^n L_{x_i} \subseteq A \\ \Rightarrow & y_r \in A \\ \Rightarrow & \bigcup_{x:A(x)=1} L_x \subseteq A. \end{aligned}$$

2. La preuve est semblable à celle de (1).

□

### 3.4. Topologies floues particuliers générées par des relations floues

---

Dans cette section, on étudier quelques classes des topologies floues générées par des relations floues comme une généralisation de cas classique.

**Définition 3.17 (La topologie floue  $T_0$ ).** [10] *Un espace topologique flou  $(X, \tau)$  est dit  $T_0$  flou si pour  $x, y \in X$ ,  $x \neq y$ , il existe un ouvert flou  $U$  tel que  $U(x) \neq U(y)$ .*

**Exemple 3.7.** Soit  $\mathcal{R}$  une relation floue sur  $X = \{x, y\}$ , donnée par

$\mathcal{R}$	$x$	$y$
$x$	0.5	0.6
$y$	0.5	0.4

Alors,  $L_x$ ,  $L_y$ ,  $R_x$  et  $R_y$  sont des ensembles flous sur  $X$  donnés par :

$$\begin{aligned}
 L_x &= \{\langle x, 0.5 \rangle; \langle y, 0.5 \rangle\} ; \\
 L_y &= \{\langle x, 0.6 \rangle; \langle y, 0.4 \rangle\} ; \\
 R_y &= \{\langle x, 0.5 \rangle; \langle y, 0.6 \rangle\} ; \\
 R_x &= \{\langle x, 0.5 \rangle; \langle y, 0.4 \rangle\}.
 \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
 \tau_1 &= \{\emptyset, X, L_x, L_y\} ; \\
 \tau_2 &= \{\emptyset, X, R_x, R_y\} ;
 \end{aligned}$$

et

$$\mathcal{S} = \{L_x, L_y, R_x, R_y\}.$$

Donc,  $\tau_{\mathcal{R}} = \{\emptyset, X, L_x, L_y, R_x, R_y, \{\langle x, 0.6 \rangle; \langle y, 0.5 \rangle\}, \{\langle x, 0.6 \rangle; \langle y, 0.6 \rangle\}$  et pour  $x, y \in X$  tels que  $x \neq y$ , il existe  $L_y \in \tau_{\mathcal{R}}$  avec  $L_y(x) \neq L_y(y)$  (i.e.,  $0.6 \neq 0.4$ ), alors  $(X, \tau_{\mathcal{R}})$  est un  $T_0$  flou.

**Définition 3.18 (La topologie floue  $T_1$ ).** [20] *Un espace topologique flou  $(X, \tau)$  est dit  $T_1$  flou si pour deux points flous distincts  $x_r, y_s$  dans  $X$ , il existe deux ouverts flous  $U, V$  tels que  $x_r \in U$ ,  $x_r \notin V$ ,  $y_s \notin U$ ,  $y_s \in V$ .*

**Exemple 3.8.** Soit  $\mathcal{R}$  une relation floue de **Exemple 3.6** donnée par :

$\mathcal{R}$	$x$	$y$	$z$
$x$	1	0.5	0
$y$	0	1	0.8
$z$	0.7	0	1

Alors,  $L_x$ ,  $L_y$ ,  $L_z$ ,  $R_x$ ,  $R_y$  et  $R_z$  sont des ensembles flous sur  $X$  donnés par :

$$\begin{aligned}
 L_x &= \{\langle x, 1 \rangle; \langle y, 0 \rangle; \langle z, 0.7 \rangle\} ; \\
 L_y &= \{\langle x, 0.5 \rangle; \langle y, 1 \rangle; \langle z, 0 \rangle\} ; \\
 L_z &= \{\langle x, 0 \rangle; \langle y, 0.8 \rangle; \langle z, 1 \rangle\} ; \\
 R_x &= \{\langle x, 1 \rangle; \langle y, 0.5 \rangle; \langle z, 0 \rangle\} ; \\
 R_y &= \{\langle x, 0 \rangle; \langle y, 1 \rangle; \langle z, 0.8 \rangle\} ; \\
 R_z &= \{\langle x, 0.7 \rangle; \langle y, 0 \rangle; \langle z, 1 \rangle\}.
 \end{aligned}$$

$(X, \tau_{\mathcal{R}})$  est  $T_1$  flou, car pour les points flous  $x_r, y_s$  dans  $X$ , ils existent deux ouverts flous  $U = L_x \cup R_z$  et  $V = L_z \cup R_y$  tels que  $x_r \in U$ ,  $x_r \notin V$ ,  $y_s \notin U$ ,  $y_s \in V$ , pour les points flous  $y_r, z_s$  dans  $X$ , ils existent deux ouverts flous  $U = R_x \cup L_y$  et  $V = L_x \cup R_z$  tels que  $y_r \in U$ ,  $y_r \notin V$ ,  $z_s \notin U$ ,  $z_s \in V$ , pour les points flous  $x_r, z_s$  dans  $X$ , ils existent deux ouverts flous  $U = R_x \cup L_y$  et  $V = L_z \cup R_y$  tels que  $x_r \in U$ ,  $x_r \notin V$ ,  $z_s \notin U$ ,  $z_s \in V$ .

**Définition 3.19 (La topologie floue  $T_2$ ).** [19] Un espace topologique flou  $(X, \tau)$  est dit  $T_2$  flou ou Hausdorff flou si pour deux points flous distincts  $x_r, y_s$  dans  $X$ , il existe deux ouverts flous  $U, V$  tels que  $x_r \in U$ ,  $y_s \in V$  et  $U \cap V = \emptyset$ .

**Exemple 3.9.** Soit  $\mathcal{R}$  une relation floue sur  $X = \{x, y, z\}$  donnée par :

$\mathcal{R}$	$x$	$y$	$z$
$x$	1	0.3	0.5
$y$	0	1	0
$z$	0	0.9	1

Alors,  $L_x$ ,  $L_y$ ,  $L_z$ ,  $R_x$ ,  $R_y$  et  $R_z$  sont des ensembles flous sur  $X$  donnés par :

$$\begin{aligned}
 L_x &= \{\langle x, 1 \rangle; \langle y, 0 \rangle; \langle z, 0 \rangle\} ; \\
 L_y &= \{\langle x, 0.3 \rangle; \langle y, 1 \rangle; \langle z, 0.9 \rangle\} ; \\
 L_z &= \{\langle x, 0.5 \rangle; \langle y, 0 \rangle; \langle z, 1 \rangle\} ; \\
 R_x &= \{\langle x, 1 \rangle; \langle y, 0.3 \rangle; \langle z, 0.5 \rangle\} ; \\
 R_y &= \{\langle x, 0 \rangle; \langle y, 1 \rangle; \langle z, 0 \rangle\} ; \\
 R_z &= \{\langle x, 0 \rangle; \langle y, 0.9 \rangle; \langle z, 1 \rangle\}.
 \end{aligned}$$

$(X, \tau_{\mathcal{R}})$  est  $T_2$  flou, car pour les points flous  $x_r, y_s$  dans  $X$ , ils existent deux ouverts flous  $U = L_x$  et  $V = R_y$  tels que  $x_r \in U$ ,  $y_s \in V$  et  $U \cap V = \emptyset$ , pour les points flous  $y_r, z_s$  dans  $X$ , ils existent deux ouverts flous  $U = R_y$  et  $V = L_z \cap R_z$  tels que  $y_r \in U$ ,  $z_s \in V$  et  $U \cap V = \emptyset$ , et pour les points flous  $x_r, z_s$  dans  $X$ , ils existent deux ouverts flous  $U = L_x$  et  $V = L_z \cap R_z$  tels que  $x_r \in U$ ,  $z_s \in V$  et  $U \cap V = \emptyset$ .

---

## Conclusion générale et perspectives

Dans ce mémoire, nous avons étudié la notion de la topologie flou introduit par le professeur Chang comme une généralisation de la notion de topologie classique, on a vu les défférent définitions et exemples sur cette théorie. Aussi, nous avons étudié un type de topologie flou qui s'appelle la topologie floue générée par une relation floue. Enfin, nous avons traité certains types de cette topologie tels que  $T_0, T_1, T_2$ . Comme perspectives, on a laisser la voi ouverte pour envisager d'autre propriétés et caractéristiques d'autres types de topologie flous.





---

# Bibliographie

- [1] N. Caspard, B. Leclerc et B. Monjardet, Ensembles ordonnés finis : concepts, résultats et usage, Springer Berlin, Heidelberg, 2000.
- [2] C.L. Chang, Fuzzy topological spaces, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 24, 182-190 (1968).
- [3] I. Chon, Fuzzy partial order relations and fuzzy lattices, Korean Journal of Mathematics, 17, 361-374 (2009).
- [4] D. Coker, An introduction to intuitionistic fuzzy topological spaces, Fuzzy Sets and Systems, 88(1), 81-89 (1997).
- [5] J. Fang, Y. Qiu, Fuzzy orders and fuzzifying topologies, International Journal of Approximate Reasoning, 48, 98-109 (2008).
- [6] J.A. Goguen, L-fuzzy sets, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 18, 145-174 (1967).
- [7] V. Knoblauch, Topologies defined by binary relations, Department of Economics Working Paper Series, University of Connecticut, Storrs, 2009.
- [8] H. Lai, D. Zhang, Fuzzy preorder and fuzzy topology, Fuzzy Sets and Systems, 157, 1665-1885 (2006).
- [9] R. Lowen, Topologies flous, Comptes Rendus Mathématique Académie des Sciences Paris, 278, 925-928 (1974).
- [10] R. Lowen, A.K. Srivastava,  $FTS_0$  : The epireflective hull of the sierpinski object in FTS, Fuzzy Sets and Systems, 29, 171-176 (1989).
- [11] K. Menger, Statistical matrices, Proceedings of National Academy of Sciences, 28, 553-537 (1942).
- [12] B.B. Meunier, La logique floue et ses applications, Addison Wesley, Paris, 1995.
- [13] S. Milles, Étude de quelques propriétés d'ordres flous intuitionistes, Mémoire de Magistère, Université Mohamed Boudiaf, M'sila, 2010.
- [14] S. Mishra, R. Srivastava, Fuzzy topologies generated by fuzzy relations, Soft Computing, 22, 373-385 (2018).
- [15] N. Moussai, Mémoire de Master, Étude sur les ensembles ordonnés flous, Université de M'sila, 2018.
- [16] W. Näther, Copulas and t-norms, Mathematical tools for combining probabilistic and fuzzy information, With application to error propagation and interaction, Structural Safety, 32, 366-371 (2010).
- [17] N. Palaniappan, Fuzzy topology, Narosa Publications, Harrow, 2002.
- [18] A. Sklar, B. Schweizer, Statistical metric spaces, Pacific Journal of Mathematics, 10, 313-334 (1960).

- [19] R. Srivastava, S.N. Lal et A.K. Srivastava, Fuzzy Hausdorff topological spaces, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 81 ,497-506 (1981).
- [20] R. Srivastava, Topics in fuzzy topology, Ph.D. Thesis, Banaras Hindu University, Varanasi, 1984.
- [21] R.H. Warren, Neighborhoods, bases and continuity in fuzzy topological spaces, Rocky Mountain Journal of Mathematics, 8, 459-470 (1978).
- [22] C.K. Wong, Fuzzy points and local properties of fuzzy topology, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 46, 316-328 (1974).
- [23] M.S Ying, A new approach for fuzzy topology (I), Fuzzy Sets and Systems, 39, 302-321 (1991).
- [24] L.A. Zadeh, Fuzzy sets, Information and Control, 8, 338-353 (1965).
- [25] L.A. Zadeh, Similarity relation and fuzzy orderings, Informtion Sciences, 3, 177-200 (1971).
- [26] H.J. Zimmermaan, Fuzzy sets theory and its application, 4<sup>th</sup> Rev. Ed. Bostan : Kluwer Academic Publishers, 2001.